

Research Article

Development of a Tool to Calculate the Preventive Maintenance Interval Using a Semi-Markovian Model Including a Degraded State

Desarrollo De Una Herramienta Para El Cálculo Del Intervalo De Mantenimiento Preventivo Usando Un Modelo Semi-Markoviano Que Incluye Un Estado Degradado

A Sánchez-Herguedas^{1*}, F Rodrigo-Muñoz²

¹Departamento de Organización Industrial y Gestión de Empresas. Escuela Técnica Superior de Ingeniería. Universidad de Sevilla, Camino de los Descubrimientos s/n, 41092 Sevilla, España.

²Departamento de Matemáticas Aplicadas II. Escuela Técnica Superior de Ingeniería. Universidad de Sevilla, Camino de los Descubrimientos s/n, 41092 Sevilla, España.

V CONGRESO
INTERNACIONAL DE
INGENIERÍA DE MECÁNICA

Corresponding Author: A
Sánchez-Herguedas; email:
antoniosh@us.es

Published: 24 July 2024

Production and Hosting by
Knowledge E

© A Sánchez-Herguedas, F
Rodrigo-Muñoz. This article is
distributed under the terms of
the [Creative Commons
Attribution License](#), which
permits unrestricted use and
redistribution provided that
the original author and
source are credited.

Abstract

This study aims to develop a tool that calculates the optimal preventive maintenance interval when the income from the operation of an asset changes. The income can be modified by market disturbances or by the decrease in the efficiency of the asset due to its degradation. A system with four states is designed to model the operation and maintenance process: operational, corrective, preventive, and degraded operation is mathematically modeled. The system evolves over time, according to a semi-Markovian process. The transitions and sojourn times between each state produce the accumulation of costs and income as returns (negative or positive) in a variable called average accumulated return. The average accumulated return is defined by a system of difference equations that are solved by applying the z-transform. The solution is a function that is dependent on the preventive interval. By derivation, the mathematical expression of the optimal preventive interval that maximizes the average accumulated return is obtained. From this expression, it can be deduced that the size of the optimal preventive interval is directly affected by the income from the asset operation. Higher income increases the size and lower income decreases it. For this reason, the maintenance manager must observe the changes occurring in the income from the use of his equipment in order to optimize his management economically.

Keywords: preventive interval, income, semi-Markovian model, Wiener process.

Resumen

Se presenta una herramienta que calcula el intervalo de mantenimiento preventivo óptimo, cuando se modifica el ingreso obtenido por el funcionamiento de un activo. El ingreso se puede modificar por alteraciones del mercado, o por la disminución de la eficiencia del activo debido a su degradación. Para reflejar el proceso de operación y mantenimiento se modela matemáticamente un sistema con cuatro estados: operativo, correctivo, preventivo y operativo degradado. El sistema evoluciona en el tiempo, según un proceso semi-markoviano. Las transiciones y los tiempos de permanencia entre cada estado provocan la acumulación de costes e ingresos como retornos (negativos o positivos) en una variable llamada retorno medio acumulado. El retorno medio acumulado se define por un sistema de ecuaciones en diferencias que se resuelve aplicando la transformada z. La solución es una función que depende del intervalo preventivo y de la que por derivación se obtiene la expresión

 OPEN ACCESS



matemática del intervalo preventivo óptimo que maximiza el retorno medio acumulado. De esta expresión se deduce que el ingreso por el uso de un activo afecta directamente al tamaño del intervalo preventivo óptimo. Un mayor ingreso aumenta el tamaño y un menor ingreso lo disminuye. Por este motivo, el responsable de mantenimiento debe observar las modificaciones que se producen en los ingresos por el uso de sus equipos, con objeto de optimizar económicamente su gestión.

Palabras Clave: *Intervalo preventivo, Ingresos, Modelo Semi-markoviano, Estado-degradado.*

1. Introducción

Realizar tareas de mantenimiento preventivo predeterminado sobre un activo físico requieren hacer un estudio para establecer el intervalo de mantenimiento preventivo óptimo. Habitualmente este estudio no lo realiza el propietario del activo que opta por seguir el plan de mantenimiento del fabricante. El plan ha sido diseñado para las condiciones de uso y mantenimiento fijadas por el fabricante, pero el propietario va a usar el activo justo en sus condiciones, ya que debe cubrir sus necesidades (1). El gestor de mantenimiento debe adaptarse a sus condiciones, por lo que debe optimizar el intervalo preventivo. En su cálculo deben considerarse el desgaste del activo, los costes de las intervenciones de mantenimiento (preventivos y correctivos) y el ingreso que genera su uso (2). Estas variables determinan el tamaño del intervalo.

En este documento se proporciona una fórmula para calcular la duración del intervalo preventivo óptimo. Para su desarrollo se ha modelado matemáticamente el proceso de operación y mantenimiento del activo. El modelo consta de cuatro estados, operativo, correctivo, preventivo y operativo degradado. El activo puede encontrarse en cualquier instante en cualquiera de ellos. A partir del instante inicial el modelo evoluciona en el tiempo, siguiendo un proceso semi-markoviano con una cadena de Markov embebida (3). El proceso evoluciona produciéndose transiciones entre los estados. Las probabilidades de cada transición siguen la ley propuesta por la cadena de Markov. En cada transición el sistema acumula costes o ingresos que son sumados como retornos (negativos o positivos). Los ingresos del estado degradado difieren de los del estado operativo. El objetivo es encontrar el tamaño del intervalo preventivo que maximice los retornos acumulados.

Durante el proceso de modelado se han definido las probabilidades de transición, los tiempos de permanencia y los retornos de cada estado. Esto permite el cálculo del retorno medio acumulado en cada transición que se expresa mediante un sistema de ecuaciones en diferencias. Utilizando la transformada z se deduce la primera componente (la que parte del estado operativo). Durante su resolución se ha tenido



que optar por dos tipos de soluciones, una para raíces reales y otra para complejas. Posteriormente se maximiza por derivación, alcanzando la expresión matemática del intervalo preventivo óptimo τ_o que maximiza el retorno medio acumulado. Como el proceso evoluciona mediante transiciones es posible encontrar el intervalo preventivo óptimo en cada transición, o sea para cualquier horizonte temporal.

Para explicar la aplicación de esta herramienta, se ha tratado un caso práctico. Debido a la ocurrencia de un evento en el motor de un camión de minería, el ingreso por el tiempo de uso del camión se ve reducido, ya que el rendimiento de su motor se ve afectado. El caso se observa cómo se ve afectado el intervalo preventivo óptimo cuando se modifica del ingreso y en el momento en que se modifica.

El resto del documento está organizado de la siguiente manera. La Sección 1.1 contiene un resumen de la literatura sobre los aspectos tratados en el artículo. La Sección 2 explica el método seguido. En la Sección 2.1 se expone el caso de estudio y los datos a utilizar para su resolución. En la Sección 2.2 se diseña el modelo semi-markoviano con cuatro estados. Primero se formula el sistema de cuatro ecuaciones en diferencia para el retorno medio acumulado. Luego se calculan los tiempos de permanencia y las probabilidades de transición entre estados y los retornos de cada estado. En la Sección 2.3 se calcula el retorno medio acumulado para los casos de raíces reales y complejas. En la Sección 2.4 se expone el proceso de optimización del retorno medio acumulado y el cálculo de la expresión matemática para el intervalo preventivo óptimo. En la Sección 3 se analizan y presentan los resultados obtenidos. En la Sección 4 se hace una discusión de los resultados y se comparan con los obtenidos con la fórmula del intervalo preventivo del modelo de tres estados sin degradación y con un modelo estocástico de simulación en tiempo continuo (Simulación Monte Carlo). Finalmente, la Sección 5 se dedica a la presentación de las conclusiones del trabajo.

1.1. Revisión de la literatura

Existe una amplia literatura sobre modelos de optimización de las políticas de mantenimiento. De Jonge y Scarf (4) realizan una importante revisión de artículos sobre este tipo de modelos. En mantenimiento se realizan varios tipos de tareas que condicionan distintos escenarios y técnicas a aplicar. Uno de los más utilizados es el mantenimiento preventivo. Milnarski et al. (5) presentan modelos desarrollados para la programación de mantenimiento preventivo de objetos técnicos complejos. Legát et al. (6) presentan un método para determinar el intervalo óptimo para el mantenimiento periódico preventivo y un parámetro de diagnóstico óptimo para la sustitución.



El modelo desarrollado en este artículo se diseña con el objetivo de obtener el intervalo preventivo. En la literatura encontramos muchos documentos donde se busca este valor partiendo de escenarios y técnicas diferentes. Sembiring et al. (7) utilizan métodos usados en ingeniería de fiabilidad y el mapeo de flujo de valor de mantenimiento para calcular el intervalo preventivo. Hu et al. (8) utilizan un modelo de Markov con sustituciones preventivas y reparaciones imperfectas. Optimizan el intervalo preventivo minimizando el coste promedio a largo plazo. Wang et al. (9) propone un modelo matemático que mide la fiabilidad de un convertidor considerando el mantenimiento preventivo periódico, a partir de esa función determinan el valor del intervalo de mantenimiento y algunos índices de fiabilidad. Zhao et al. (10) comparan modelos donde el componente se reemplaza preventiva y periódicamente frente al modelo lo que ocurra primero y último, para encontrar tiempos óptimos del reemplazo periódico. Zhao et al. (11) modelan políticas de reemplazo de acuerdo con el estado de salud y el historial de reparaciones de la unidad operativa y determinan los tiempos de reemplazo minimizando analíticamente las tasas de costes. Semaan y Yehia (12) desarrollan un programa mantenimiento preventivo programado periódico para un helicóptero, utilizando una red de operación cíclica y técnicas de simulación Monte Carlo. Liu et al. (13) proponen un modelo integrado de existencias reguladoras y mantenimiento preventivo imperfectivo para un sistema de producción. Este documento considera una máquina reparable sujeta a fallos aleatorios para un sistema de producción considerando existencias de reserva. Ruschel et al. (14) presentan una detallada revisión de artículos referidos a la toma de decisiones, en una de las áreas tratan los intervalos de mantenimiento preventivo.

En el artículo, para localizar el valor del intervalo preventivo óptimo se ha desarrollado un modelo semi-markoviano. Otros autores también utilizan esta técnica porque se adapta bien a las características de ejecución de las tareas de mantenimiento. Lyubchenko et al. (3) presentan un enfoque para la evaluación de los intervalos de mantenimiento preventivo recomendados de los dispositivos de radiocomunicaciones. Usan la teoría del proceso de Markov para describir matemáticamente la secuencia de transiciones entre estados y aplican el modelo del proceso semi-markoviano al proceso aleatorio de los tiempos de permanencia en los estados. Kumar y Varghese (15) utilizan distribuciones de tiempos de fallos y reparaciones no exponenciales lo que le obliga a modelar desde un enfoque semi-markoviano con el que evalúan la disponibilidad del sistema. Mediante la técnica de búsqueda de la sección dorada obtienen el intervalo preventivo que optimiza la disponibilidad. Yi et al. (16) desarrollan un sistema semi-markoviano de tiempo discreto con un espacio de estados formado por tres subconjuntos: de trabajo, modificable y de fallo. Utilizan la transformada z para



investigar las propiedades estocásticas del sistema semimarkoviano y las distribuciones de algunos períodos de permanencia. Wu et al. (17) proporcionan un método para resolver procesos semi-markovianos de tiempo continuo mediante algoritmos del caso de tiempo discreto. Este método se aplica a un problema de fiabilidad de un sistema sujeto a ciberataques secuenciales. Se consideran y calculan dos casos en los que los tiempos de permanencia siguen distribuciones exponenciales y de Weibull.

Otros autores utilizan cadenas de Markov. Farahani et al. (18) modelan un sistema de producción en forma de cadena de Markov de tiempo continuo. Este modelo determina el intervalo óptimo de mantenimiento preventivo al reducir los costos por unidad de tiempo. Gu et al. (19) mediante el desarrollo de un marco basado en modelos de cadenas de Markov en tiempo discreto, evalúan el rendimiento del sistema bajo la política de límite de control, en sistemas de fabricación que consisten en máquinas multiestado y buffers intermedios. Realizan un análisis numérico para demostrar el impacto de parámetros como la duración del mantenimiento.

Nuestro modelo incluye en el cálculo el ingreso por unidad de tiempo de funcionamiento del activo y analiza el efecto sobre el intervalo preventivo. Este ingreso que recibe el propietario, no se considera en la mayoría de los estudios de optimización y son muy pocos los casos, hasta donde nosotros sabemos, en los que este dato es considerado. Zhu et al. (20) investigan un modelo de optimización de mantenimiento preventivo basado en un proceso de fallo de tres etapas para un sistema de un solo componente. El objetivo es maximizar las ganancias, pero a diferencia de los modelos de optimización convencionales utiliza una función de ingresos para correlacionar las ganancias con la disponibilidad y el coste. Mizutani y Zhao (21) utilizan varias técnicas y herramientas de ingeniería de fiabilidad para seleccionar las mejores políticas que sean adecuadas para sistemas con reemplazos, incluidos los periódicos. El método desarrollado encuentra el intervalo preventivo óptimo. Para ello, parten de la función de supervivencia, y los valores de ingresos y costos incurridos durante las intervenciones de operación y mantenimiento. Los autores del artículo han presentado varios documentos, todos relacionados, donde utilizan los ingresos obtenidos por el uso de los activos (22), (23), (24), (25) y (26), para el cálculo del intervalo preventivo óptimo.

Los datos de degradación se han utilizado ampliamente para la predicción de la vida útil restante (RUL) de los sistemas. La mayoría de los trabajos existentes aplican un modelo preestablecido para capturar el proceso de degradación y se centran en el proceso de degradación sin choques o efectos de choque constantes (27). Sin embargo, en este artículo se incluye un estado de operación degradado. Con la palabra degradado se ha querido expresar la circunstancia de que tras el evento el equipo



mantiene la misma función de distribución de fallos del estado operativo, pero los ingresos por su funcionamiento son menores. También podrían ser mayores.

Otro aspecto para destacar del modelo propuesto es que las ecuaciones para el retorno medio acumulado y el intervalo preventivo óptimo permiten el cálculo de estos valores para cualquier horizonte finito. En la literatura, el horizonte finito en estudios sobre mantenimiento no suele ser lo más común, pero si hay variedad de publicaciones. Baklouti et al. (28) desarrollan una estrategia de mantenimiento preventivo para un sistema solar fotovoltaico que falla cuando su eficiencia cae por debajo del umbral predefinido o cualquier elemento está dañado. La estrategia de mantenimiento preventivo propuesta sugiere reemplazar sistemáticamente paneles cada cierto intervalo preventivo durante un tiempo finito de funcionamiento. Este tiempo finito afecta al intervalo preventivo. Pandey et al. (29) proponen un modelo de programación de mantenimiento preventivo. El modelo incluye un horizonte de planificación finito y recursos disponibles limitados para realizar la programación del mantenimiento.

Por último, se ha utilizado la transformada z como herramienta matemática para encontrar la expresión del retorno medio acumulado. En el campo del mantenimiento industrial hay poca documentación donde se utilice esta técnica de resolución. Se suele aplicar en temas de propagación de ondas y resonancia (30) o en acústica (31). Analizando los artículos donde se calcula el intervalo preventivo, en su mayoría aplican algoritmos, en pocos casos se ofrece una fórmula matemática cuyas entradas sean datos disponibles por el gestor de mantenimiento: datos de fallos o costes de las intervenciones. La excepcionalidad de este artículo está en que en esa fórmula se incluyen los ingresos por el uso del activo, y gracias al estado degradado permite analizar el valor del intervalo preventivo óptimo cuando se modifican los ingresos.

2. Material y método

El objetivo del trabajo es encontrar la expresión matemática del intervalo preventivo que rehabilita un modo de fallo de un activo. Su valor depende del tiempo de uso desde la última rehabilitación, de la distribución de sus fallos, de los costes de las tareas de mantenimiento y la penalización por su inactividad, y de los ingresos por su operación. El modo de fallo a analizar debe mostrar una clara tendencia al desgaste. Estas hipótesis son cumplidas por muchos tipos de equipos industriales. A lo largo del documento se expone el proceso para alcanzar la expresión matemática y se muestra cómo aplicarla. Con ella, un responsable de mantenimiento, sin conocimientos especializados en técnicas de modelado y cálculo, puede aplicarla a los activos de su planta sin que ello le consuma un exceso de tiempo y recursos. Se ha elegido ajustar



los fallos a una función de distribución acumulado de Weibull porque tras ensayar los datos con otras funciones (Normal, Normal truncada, Gamma) los resultados obtenidos presentan una mayor desviación.

2.1. Caso real y tratamiento de la información. Distribución de Weibull y Retornos

En este artículo se desarrolla un modelo de cuatro estados y se aplica al caso del fallo de la unión cónica entre la distribución y el arrastre de las bombas inyectoras de un motor diesel de alta potencia. Se trata de un elemento intermedio en la cadena de arrastre cuya misión es proteger la distribución de los posibles fallos de las bombas inyectoras. Cuando una de las bombas inyectoras queda bloqueada, la unión cónica gira, desconectando el arrastre de las bombas. Esta conexión se mantiene mediante la aplicación de un par de apriete. Mientras el par aplicado por la distribución, para mover las bombas, esté por debajo del par aplicado a la unión cónica, el motor funcionará. En caso contrario, el motor se detendrá por falta de sincronía. Se trata de un caso real en una mina del sur de España.

A veces durante el funcionamiento o arranque del motor se produce un leve giro entre las superficies cónicas. Este desplazamiento afecta al punto de inyección de las bombas, retrasándolo. En estas condiciones el motor baja levemente de rendimiento sin que aparentemente se aprecie un funcionamiento anormal del motor. Sin embargo, el rendimiento del motor disminuye y también lo hace el ingreso que aporta al negocio por hora de funcionamiento. Este caso es muy habitual en los equipos industriales y equivale a un sistema donde el equipo objeto de estudio puede encontrarse en uno de los siguientes cuatro estados: operativo, operativo degradado, correctivo y preventivo. El equipo está en estado operativo S_1 si opera produciendo los ingresos esperados. Si los ingresos obtenidos por su funcionamiento son inferiores a los esperados el equipo está en estado degradado S_4 . Si el equipo falla, se sitúa durante su reparación en estado correctivo S_2 . Y si el equipo se detiene para realizar una actividad preventiva, se encontrará en el estado preventivo S_3 . Ver Figura 1.

Para analizar el caso de la unión cónica se han seleccionado datos procedentes de una actividad minera. Los datos se han recogido durante cuatro años y su origen corresponden a dos tipos diferentes, Por un lado, se han recogido los datos de los tiempos de fallo, t_i , que se han producido en 16 motores. Estos datos se recogen en la Tabla I. A partir de ellos se estima la función de distribución de fallos observada. Para su construcción se utiliza como estimador la aproximación de Benard, $F_i = \frac{(i-0.3)}{(N+0.4)}$, donde i representa el orden del fallo y N el número total de fallos (en este caso 48 fallos)



(32) (33). En su cálculo no se han tenido en cuenta los valores de los datos censurados como consecuencia de la finalización del proceso de toma de datos antes del fallo, por ser pocos los valores y muy inferiores a los valores de los datos de fallo. A partir de los datos de horas de fallo (Tabla I) y los datos de la función de distribución de fallos observada, F_i (Tabla II) se estima la función de distribución de fallos teórica, $F(t)$, que mejor se adapta a la dupla (horas de fallo t_i , función observada F_i). Habitualmente para el caso de activos físicos se suele ajustar a la función de distribución de Weibull (34).

Tabla 1

Datos de tiempos de fallo, t_i correspondientes a los 48 fallos (horas).

| | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 6,635 | 4,087 | 4,225 | 3,964 | 6,118 | 3,775 | 4,377 | 6,851 | 2,823 | 6,684 |
| 6,915 | 1,733 | 5,645 | 4,471 | 4,890 | 5,887 | 5,358 | 4,305 | 6,536 | 6,622 |
| 4,232 | 3,661 | 7,861 | 5,714 | 7,421 | 4,585 | 4,566 | 4,358 | 6,672 | 4,132 |
| 3,209 | 4,979 | 6,927 | 4,562 | 2,283 | 7,616 | 6,618 | 3,620 | 3,478 | 2,668 |
| 7,641 | 3,879 | 5,775 | 7,030 | 4,226 | 3,829 | 5,415 | 6,390 | | |

Tabla 2

Tiempos de fallo t_i ordenados y de valores de la función de distribución observada para los 48 fallos.

| t_i | F_i | t_i | F_i | t_i | F_i | t_i | F_i | t_i | F_i |
|-------|-------------|-------|-------------|-------|-------------|-------|-------------|-------|-------------|
| 1,733 | 0.01446281 | 3,879 | 0.22107438 | 4,471 | 0.42768595 | 5,775 | 0.634297521 | 6,851 | 0.840909091 |
| 2,283 | 0.035123967 | 3,964 | 0.241735537 | 4,562 | 0.448347107 | 5,887 | 0.654958678 | 6,915 | 0.861570248 |
| 2,668 | 0.055785124 | 4,087 | 0.262396694 | 4,566 | 0.469008264 | 6,118 | 0.675619835 | 6,927 | 0.882231405 |
| 2,823 | 0.076446281 | 4,132 | 0.283057851 | 4,585 | 0.489669421 | 6,390 | 0.696280992 | 7,030 | 0.902892562 |
| 3,209 | 0.097107438 | 4,225 | 0.303719008 | 4,890 | 0.510330579 | 6,536 | 0.716942149 | 7,421 | 0.923553719 |
| 3,478 | 0.117768595 | 4,226 | 0.324380165 | 4,979 | 0.530991736 | 6,618 | 0.737603306 | 7,616 | 0.944214876 |
| 3,620 | 0.138429752 | 4,232 | 0.345041322 | 5,358 | 0.551652893 | 6,622 | 0.758264463 | 7,641 | 0.964876033 |
| 3,661 | 0.159090909 | 4,305 | 0.365702479 | 5,415 | 0.57231405 | 6,635 | 0.77892562 | 7,861 | 0.98553719 |
| 3,775 | 0.179752066 | 4,358 | 0.386363636 | 5,645 | 0.592975207 | 6,672 | 0.799586777 | | |
| 3,829 | 0.200413223 | 4,377 | 0.407024793 | 5,714 | 0.613636364 | 6,684 | 0.820247934 | | |

Este proceso se inicia tratando de ajustar la función observada a la Weibull de dos parámetros (α , β). Si el método utilizado es la Estimación por Rango de Medianas (MRR), se representan los puntos de la dupla (t_i , F_i) en un gráfico, utilizando las escalas logarítmicas, $\ln \ln (1 / (1 - F_i))$ en el eje vertical y $\ln t_i$ en el eje horizontal. Luego se traza la línea de tendencia que mejor se ajusta a los puntos, usando el método de mínimos cuadrados. El parámetro de forma α de la función Weibull coincide con la pendiente de la línea de tendencia, mientras que el parámetro de escala β corresponde con la exponencial negativa del cociente entre la ordenada en el origen y la pendiente. Este procedimiento se simplifica utilizando software como EXCEL (23). En este caso



la curva de tendencia es $y = 3.5979 x - 31.1$. Los valores obtenidos son $\alpha = 3.60$ y $\beta = 5675$. Sin embargo, la curva de tendencia cuadrática presenta una curvatura hacia abajo $y = -0.1734 x^2 + 6.4975 x - 43.2$, lo que avisa de la existencia del tercer parámetro γ , denominado vida garantizada o parámetro de localización. En un nuevo gráfico podemos volver a representar los mismos datos. Este nuevo gráfico se diferencia del anterior en que en el eje horizontal se representa el $\ln(t_i - \gamma)$. Dando valores a γ localizamos el valor que convierte la curva de tendencia cuadrática en una recta (coeficiente de x^2 igual a cero). Los valores de los parámetros de la función de Weibull que mejor se ajusta a la función observada son: $\alpha = 3.33$, $\beta = 5368$ y $\gamma = 301$. Por otro lado, se deben estimar las funciones de distribución del tiempo de reparación $F_c(t)$ y del tiempo preventivo $F_p(t)$. Debido a la corta duración del tiempo de mantenimiento en comparación con los intervalos de funcionamiento (menos del 1%), se puede utilizar como estimadores, el tiempo medio de ambas intervenciones. En este caso $\mu_2 = 72$ para la tarea correctiva y $\mu_3 = 56$ para la tarea preventiva.

Con los mismos datos de fallo se ha ajustado a una Weibull utilizando otros métodos como el método de estimación de máxima verosimilitud (MLE) y el método de Newton-Raphson. En este caso, comparando los resultados obtenidos por los tres métodos mediante el método del error cuadrático medio (MSE) no se ajustan mejor que el MRR a la función observada, a pesar de que el proceso en ambos casos es mucho más complicado.

El segundo tipo de datos corresponde a los costes e ingresos que aparecen como consecuencia de uso y mantenimiento del activo. Estos datos constituyen los retornos del sistema y están asociados a cada uno de los estados. Al estado operacional S_1 se asocian dos tipos de retornos. Los ingresos por unidad de tiempo de funcionamiento R_1 y los costes asociados a la pérdida del funcionamiento, cuando el activo falla R_{12} y cuando el activo pasa al estado degradado R_{14} . Los retornos asociados al estado correctivo S_2 son costes. El coste por unidad de tiempo debido al proceso de reparación R_2 y los costes asociados a la falta de actividad por avería incluidos en R_{21} . Los retornos asociados al estado preventivo S_3 también son costes. El coste por unidad de tiempo debido a la tarea preventiva R_3 y los costes asociados a la falta de actividad por preventivo R_{31} . Al estado degradado S_4 se asocian otros dos tipos de retornos. Los ingresos por unidad de tiempo de funcionamiento R_4 , que ahora son inferiores a los del estado operativo y los costes asociados a la pérdida del funcionamiento, cuando el activo falla R_{42} y cuando se decide que el activo pare para la realización del mantenimiento preventivo R_{43} . Todos estos datos están recogidos en la Tabla III.



Tabla 3

Datos de entrada al modelo. Datos de fallos, tiempos y actividades promedio, costes e ingresos para cada estado.

| Función de distribución de fallos | | | | | | Tiempo medio de reparación | Tiempo medio de preventivo | | |
|-------------------------------------|---------------------|---------------------|-------------------------|---------------------|---------------------|----------------------------|----------------------------|-------------------------|---------------------|
| Weibull (α, β, γ) | | | | | | Normal (μ_2) | Normal (μ_3) | | |
| α | β | | γ | | | μ_2 (horas) | μ_3 (horas) | | |
| 3.33 | 5,368.00 | | 301.00 | | | 72 | 56 | | |
| S ₁ Retornos | | | S ₄ Retornos | | | S ₂ Retornos | | S ₃ Retornos | |
| R ₁ (€/hora) | R ₁₂ (€) | R ₁₃ (€) | R ₄ (€/hora) | R ₄₂ (€) | R ₄₃ (€) | R ₂ (€/hora) | R ₂₁ (€) | R ₃ (€/hora) | R ₃₁ (€) |
| 5.0 | -3,270 | -1.0 | 4.0 | -3,270 | -1.0 | -95.0 | -360 | -82.0 | -360 |

2.2. Diseño de un modelo de mantenimiento semi-Markoviano con un estado degradado

El modelo diseñado representa el comportamiento de un sistema (activo) cuando se somete a intervenciones de mantenimiento preventivo y correctivo, con objeto de evitar el desgaste por el uso. En este caso también se considera el funcionamiento del sistema en un estado degradado. Como marco teórico previo, se considera una cadena homogénea de Markov $\{X_n, n \geq 0\}$ con n estados, y probabilidades de transición en cada paso $p_{ij} = P(X_1 = j | X_0 = i)$. Esta cadena constituye la cadena de Markov incrustada en un proceso semi-markoviano y determina la evolución del proceso. Por otro lado, el proceso semi-markoviano se caracteriza por tiempos de permanencia que difieren en cada estado, los cuales no siguen una distribución exponencial (24). Los tiempos de permanencia y la transición entre estados tienen asociados retornos económicos que pueden ser positivos si se trata de ingresos o negativos si se trata de costes. La variable $r_{ij}(m)$ contiene el retorno desde el estado i al estado j en la transición m .

2.2.1. Formulación del sistema de ecuaciones en diferencias para el retorno medio acumulado

En m transiciones sucesivas a partir del estado i , el proceso acumula retornos, que sumados con sus respectivos signos constituyen el retorno acumulado en m pasos desde el estado i . Llamamos $R_i(m)$ a esta variable aleatoria. Una vez seleccionado el estado inicial, el siguiente estado es impredecible y todos los que le siguen. En m transiciones el sistema puede establecer muchas alternativas. Por este motivo, no es



posible calcular el valor de $R_i(m)$, pero sí su valor medio, el retorno medio acumulado $v_i(m) = E(R_i(m))$.

El retorno medio acumulado $v_i(m)$ se obtiene mediante una ecuación recursiva (22). El procedimiento consiste en separar las m transiciones en dos etapas. La primera está constituida por la transición del estado inicial i , al siguiente j . Como este puede ser cualquier estado, el retorno $R_i(1)$ es una variable aleatoria que puede alcanzar los valores $r_{i1}(1), r_{i2}(1), r_{i3}(1), r_{i4}(1)$, con probabilidades, $p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}, p_{i4}$. El retorno medio en la primera transición se puede formular de la siguiente manera:

$$v_i(1) = \sum_{j=1}^4 r_{ij}(1) p_{ij} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (1)$$

En la segunda etapa se procede con las $m-1$ restantes transiciones. Una vez completada la primera transición, el proceso se encuentra en un estado j , donde j toma uno de los valores 1, 2, 3, 4. El retorno medio en las siguientes $m-1$ transiciones es una variable aleatoria que puede alcanzar los valores $v_1(m-1), v_2(m-1), v_3(m-1), v_4(m-1)$, con probabilidades, $p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}, p_{i4}$. Por lo tanto, el retorno medio acumulado en los $m-1$ pasos se puede formular como:

$$\sum_{j=1}^4 v_j(m-1) p_{ij} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2)$$

Finalmente, la Ec. (3) calcula el retorno medio acumulado del sistema para m :

$$v_i(m) = v_i(1) + \sum_{j=1}^4 v_j(m-1) p_{ij} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3)$$

Su forma matricial:

$$V(m) = V(1) + PV(m-1). \quad (4)$$

Por conveniencia, se reescribe con el índice aumentado en una unidad. Ahora, aplicando la transformada z a ambos miembros de Ec. (4) y términos de reordenamiento que tenemos:

$$Z[V(m)] = \frac{1}{z-1} (I - z^{-1}P)^{-1} V(1) + (I - z^{-1}P)^{-1} V(0) \quad (5)$$

Solo queda invertir la transformada z , para resolver la Ec. (4).

2.2.2. Modelo de cuatro estados. Cálculo de los tiempos de permanencia en cada estado.

Las transiciones entre estados y la acumulación de retornos se expresan gráficamente en la Figura 1. También se observan los cuatro estados y las posibles transiciones.

El tiempo que el activo se mantiene funcionando a partir del instante inicial es una variable aleatoria que llamaremos T y puede tomar cualquier valor positivo. Usualmente, a esta variable se le llama tiempo hasta el fallo.

Si en el instante inicial el sistema se encuentra en estado operativo S_1 . Permanecerá en este estado hasta que ocurra una de estas dos circunstancias:

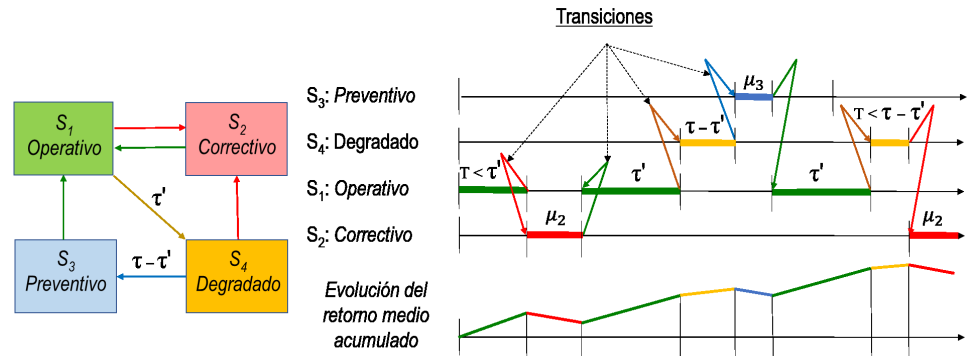


Figura 1

Representación de los estados, transiciones entre estados y acumulación de retornos en cada transición.

Se produce el fallo y el sistema pasa al estado correctivo, S_2 .

Aunque se encuentra funcionando, tras el tiempo τ' , el sistema alcanza el estado degradado, S_4 .

El tiempo T_0 es el tiempo que el sistema está en el estado operativo. Es la variable aleatoria tiempo hasta el fallo, truncada en el intervalo $[0, \tau']$. Se define como: $T_0 = \min \{T, \tau'\}$. Si el sistema falla, en S_2 , se somete a reparación y regresa al estado S_1 . El tiempo que dura la reparación también es una variable aleatoria llamada T_c . Pero si se produce la circunstancia b), el sistema pasa al estado S_4 . Allí permanece hasta que se da una de estas dos circunstancias:

Se produce el fallo y el sistema pasa al estado correctivo, S_2 .

Ha pasado un tiempo $\tau - \tau'$, donde τ , al igual que τ' es un tiempo prefijado.

Es preciso distinguir entre el intervalo de permanencia en el estado S_4 que es $[\tau', \min \{T, \tau\}]$ y el tiempo de permanencia T_d en S_4 que es la duración de ese intervalo:

$$T_d = \min \{T, \tau\} - \tau' = \min \{T - \tau', \tau - \tau'\}$$

Como el sistema se mantiene en el estado S_4 entre los instantes τ' y como máximo τ , el tiempo de permanencia T_d es la variable aleatoria $T - \tau'$ truncada al intervalo $[\tau', \tau]$.

Si se produce la circunstancia c), el sistema pasa al estado correctivo para su reparación. Una vez reparado, el sistema regresa al estado S_1 .

Pero si se produce la circunstancia d), el sistema pasa al estado preventivo S_3 , en el que se someterá a la acción preventiva con objeto de devolverlo a las condiciones para las que fue diseñado (estado operativo). El tiempo que dura la acción preventiva también es una variable aleatoria T_p .

Este plan de mantenimiento se comporta como un proceso estocástico con un espacio de cuatro estados. Los tiempos de permanencia en cada estado son variables



aleatorias. El objetivo de este trabajo es encontrar el valor de τ que maximiza el retorno medio acumulado para un valor de τ' dado.

Las funciones de distribución de T , T_c , T_p las designaremos $F(\bullet)$, $F_c(\bullet)$, $F_p(\bullet)$ y las de densidad de probabilidad $f(\bullet)$, $f_c(\bullet)$, $f_p(\bullet)$. Las variables aleatorias T_0 y T_d tienen distribuciones truncadas cuyas funciones de distribución se definen a partir de la función de distribución de T .

La matriz de tiempos de permanencia en un estado antes de pasar a otro es:

$$\begin{pmatrix} 0 & T_0 & 0 & \tau' \\ T_c & 0 & 0 & 0 \\ T_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_d & \tau - \tau' & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Donde el i, j -th elemento es el tiempo de permanencia en el estado i antes de saltar al estado j .

El tiempo medio de permanencia en el estado operativo es:

$$A = E(T_0) = \frac{1}{F(\tau')} \int_0^{\tau'} t f(t) dt = \tau' - \frac{1}{F(\tau')} \int_0^{\tau'} F(t) dt .$$

Los tiempos medios de permanencia en los estados correctivo y preventivo, son las medias de las variables aleatorias T_c y T_d :

$$\mu_2 = E(T_c) = \int_0^{\infty} t f_c(t) dt, \quad \mu_3 = E(T_p) = \int_0^{\infty} t f_p(t) dt$$

Como se comentó en la sección 2.1, $B = \mu_2$ y $C = \mu_3$.

La media de T_d , es decir, el tiempo medio de permanencia en el estado operativo degradado es:

$$D = E(T_d) = \frac{1}{F(\tau) - F(\tau')} \int_{\tau'}^{\tau} (t - \tau') f(t) dt \quad (7)$$

La matriz de tiempos de medios de permanencia es la media de los tiempos de permanencia de la matriz Ec. (6):

$$Q = E \left[\begin{pmatrix} 0 & T_0 & 0 & \tau' \\ T_c & 0 & 0 & 0 \\ T_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_d & \tau - \tau' & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & A & 0 & \tau' \\ \mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D & \tau - \tau' & 0 \end{pmatrix} . \quad (8)$$

Donde $E[\bullet]$ significa, valor medio.



2.2.3. Probabilidades de transición entre los estados

Como en todos los procesos aleatorios de tiempo continuo, durante el tiempo que el proceso se encuentra en un estado, no hay transición al mismo estado. Entonces la probabilidad de transición de un estado a sí mismo es cero.

Por eso, estando el sistema en el estado S_1 , sólo puede pasar a los estados S_2 y S_4 . La probabilidad de pasar al estado S_2 es $P(T \leq \tau') = F(\tau') = p_1$. La probabilidad de pasar al estado S_4 es $P(T > \tau') = 1 - P(T \leq \tau') = 1 - F(\tau') = 1 - p_1$. Siendo $p_1 = F(\tau')$.

Estando el sistema en el estado S_4 , sólo puede pasar a los estados S_2 y S_3 . La probabilidad de pasar al estado S_2 es:

$$P(T < \tau \quad T > \tau') = \frac{P[(T < \tau) \cap (T > \tau')]}{P(T > \tau')} = \frac{P(\tau' < T < \tau)}{1 - P(T < \tau')} = \frac{F(\tau) - F(\tau')}{1 - F(\tau')} = \frac{p_2 - p_1}{1 - p_1}$$

Siendo $p_2 = F(\tau)$, y al estado S_3 :

$$P(T > \tau \quad T > \tau') = 1 - P(T < \tau \quad T > \tau') = 1 - \frac{p_2 - p_1}{1 - p_1} = \frac{1 - p_2}{1 - p_1}$$

En los estados S_2 y S_3 , el sistema sólo puede pasar al estado S_1 , luego las probabilidades de transición toman ambas el valor 1. Por lo tanto, se puede escribir la matriz de probabilidades de transición P como:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 & 1 - p_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p_2 - p_1}{1 - p_1} & \frac{1 - p_2}{1 - p_1} & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Esta es la matriz de probabilidad de una cadena de Markov. Las transiciones de esta cadena ocurren cada vez que el proceso estocástico cambia de estado, por lo que es la cadena de Markov incrustada en el proceso.

Hemos llegado al proceso estocástico que modela el mantenimiento de nuestro sistema, que tiene un espacio de estados finito, los tiempos de permanencia en cada estado son variables aleatorias con distribuciones de probabilidad no necesariamente exponenciales, y tiene una cadena de Markov incrustada cuya matriz de probabilidades de transición es Ec. (9). Concluimos que se trata de un proceso semi-markoviano.

2.2.4. Cálculo de los retornos aportados por cada uno de los estados

A partir de los tiempos de permanencia que aparecen en la Ec. (8) y los retornos expresados en la Tabla III se puede componer la matriz de retornos. Es una matriz cuyo



ij – ésimo elemento es la suma del retorno debido a la permanencia en el i – ésimo estado y el debido a la transición al j – ésimo estado, Ec. (10).

$$R = \begin{pmatrix} 0 & AR_1+R_{12} & 0 & R_1\tau'+R_{14} \\ BR_2+R_{21} & 0 & 0 & 0 \\ CR_3+R_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & DR_4+R_{42} & (\tau-\tau')R_4+R_{43} & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

2.3. Cálculo del retorno medio acumulado

2.3.1. Resolución del sistema de ecuaciones en diferencia para el retorno medio acumulado.

El vector $V(1)$ se obtiene a partir de la Ec. (1) para lo que necesitamos las matrices (9) y (10), es decir la matriz de probabilidades y la matriz de retornos. De la Ec. (1) se deduce que su componente i – ésima es la suma de los productos de las filas i – ésimas de ambas matrices. No se trata de un producto de matrices:

$$\begin{pmatrix} v_1(1) \\ v_2(1) \\ v_3(1) \\ v_4(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (AR_1+R_{12})p_1+(R_1\tau'+R_{14})(1-p_1) \\ BR_2+R_{21} \\ CR_3+R_{31} \\ (DR_4+R_{42})\frac{p_2-p_1}{1-p_1} + ((\tau-\tau')R_4+R_{43})\frac{1-p_2}{1-p_1} \end{pmatrix} \quad (11)$$

A partir de la matriz P se obtiene la matriz $I - z^{-1}P$, y su matriz inversa $(I - z^{-1}P)^{-1}$, donde $\Delta = z^3 - p_1z + p_1 - 1$. Este polinomio se anula si $z = 1$ y $z = -\frac{1 \pm \sqrt{4p_1 - 3}}{2}$.

El vector de retornos esperados inicial $V(0)$ es el vector nulo, ya que no hay ningún retorno previo en el instante inicial. De acuerdo con ello escribimos la Ec. (5) como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[V(m)] &= \frac{1}{z-1} (I - z^{-1}P)^{-1} V(1) = & (12) \\ &= \frac{1}{(z-1)\Delta} \begin{pmatrix} z^3 & z(p_1z - p_1 + p_2) & z(1-p_2) & z^2(1-p_1) \\ z^2 & z^3 + p_2 - 1 & 1 - p_2 & z(1-p_1) \\ z^2 & p_1z - p_1 + p_2 & z^3 - p_1z + p_1 - p_2 & z(1-p_1) \\ z & \frac{z^2(p_1 - p_2) + p_1(p_2 - 1)}{p_1 - 1} & \frac{(z^2 - p_1)(p_2 - 1)}{p_1 - 1} & z(z^2 - p_1) \end{pmatrix} \times \end{aligned}$$



$$\times \begin{pmatrix} (AR_1+R_{12})p_1+(R_1\tau'+R_{14})(1-p_1) \\ BR_2+R_{21} \\ CR_3+R_{31} \\ (DR_4+R_{42})\frac{p_2-p_1}{1-p_1} + \left((\tau-\tau')R_4+R_{43} \right) \frac{1-p_2}{1-p_1} \end{pmatrix}$$

Centramos nuestra atención en la primera componente de este vector, para resolverla, si ordenamos los términos del corchete en el orden de las potencias decrecientes de z :

$$\mathcal{L} [v_1(m)] = \frac{1}{(z-1)\Delta} [v_1(1)z^3 + (p_1v_2(1) + (1-p_1)v_4(1))z^2 + ((p_2-p_1)v_2(1) + (1-p_2)v_3(1))z] \quad (13)$$

Recordando que $\Delta = z^3 - p_1z + p_1 - 1$, nos queda que la Ec. (13) es combinación lineal de funciones racionales en z . Estas funciones son:

$$\begin{aligned} \frac{z^3}{(z^3-p_1z+p_1-1)(z-1)} &= \frac{z^3}{(z^2+z-p_1+1)(z-1)^2}, \\ \frac{z^2}{(z^3-p_1z+p_1-1)(z-1)} &= \frac{z^2}{(z^2+z-p_1+1)(z-1)^2}, \\ \frac{z}{(z^3-p_1z+p_1-1)(z-1)} &= \frac{z}{(z^2+z-p_1+1)(z-1)^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Las fracciones en Ec. (14) tienen en el denominador la raíz doble $z = 1$. Se pueden descomponer en fracciones.

En la descomposición en fracciones, Ec. (14), las tres tienen en el denominador el polinomio de segundo grado $z^2 + z - p_1 + 1$ que por tener dos raíces admiten una descomposición en dos fracciones simples. Las raíces de este polinomio pueden ser reales o complejas dependiendo del valor de p_1 . Las raíces son $\frac{-1 \pm \sqrt{4p_1-3}}{2}$, reales si $4p_1 - 3$ es no negativo y complejas conjugadas si es negativo. Así, en la Ec. (14), cada una de las tres fracciones del primer miembro quedaría descompuesta en cuatro fracciones simples. En caso de que $4p_1 - 3 < 0$, dos de las fracciones corresponderían a raíces complejas, y en caso contrario, a raíces reales. Para mayor claridad en la exposición se separará en caso real y complejo.

2.3.2. Caso 1. Raíces reales

Si las raíces del polinomio $(z^2 + z - p_1 + 1)$ son reales, llamándolas por simplificar:

$$r_1 = \frac{-1 + \sqrt{4p_1-3}}{2}, \quad r_2 = \frac{-1 - \sqrt{4p_1-3}}{2},$$

obtenemos la descomposición:

$$\frac{a_j z + b_j}{z^2 + z - p_1 + 1} = \frac{1}{\sqrt{4p_1-3}} \left[\frac{a_j r_1 + b_j}{z - r_1} - \frac{a_j r_2 + b_j}{z - r_2} \right], \quad j = 1, 2, 3. \quad (15)$$

Introducimos las Ec. (15) en la Ec. (14), y éstas a su vez en la Ec. (13), que queda de esta forma:



$$\begin{aligned} \mathcal{L} [v_1(m)] = & v_1(1) \left[\frac{1}{\sqrt{4p_1-3}} \left(\frac{a_1r_1+b_1}{z-r_1} - \frac{a_1r_2+b_1}{z-r_2} \right) + \frac{c_1}{(z-1)^2} + \frac{d_1}{z-1} \right] + (p_1v_2(1) + (1-p_1)v_4(1)) \\ & \left[\frac{1}{\sqrt{4p_1-3}} \left(\frac{a_2r_1+b_2}{z-r_1} - \frac{a_2r_2+b_2}{z-r_2} \right) + \frac{c_2}{(z-1)^2} \right. \\ & \left. + \frac{d_2}{z-1} \right] \\ & + ((p_2-p_1)v_2(1) + (1-p_2)v_3(1)) \left[\frac{1}{\sqrt{4p_1-3}} \left(\frac{a_3r_1+b_3}{z-r_1} - \frac{a_3r_2+b_3}{z-r_2} \right) + \frac{c_3}{(z-1)^2} + \frac{d_3}{z-1} \right] \end{aligned} \tag{16}$$

Reagrupando los términos del segundo miembro de la Ec. (16), y sacando como factores comunes las fracciones simples $\frac{1}{z-r_1}$, $\frac{1}{z-r_2}$, $\frac{1}{(z-1)^2}$, $\frac{1}{z-1}$, la ecuación queda del siguiente modo:

$$\mathcal{L} [v_1(m)] = A_1 \frac{1}{z-r_1} + A_2 \frac{1}{z-r_2} + A_3 \frac{1}{(z-1)^2} + A_4 \frac{1}{z-1} \tag{17}$$

Donde:

$$\begin{aligned} A_1 = & \frac{1}{\sqrt{4p_1-3}} [v_1(1)(a_1r_1+b_1) \\ & + (p_1v_2(1) + (1-p_1)v_4(1))(a_2r_1+b_2) + ((p_2-p_1)v_2(1) \\ & + (1-p_2)v_3(1))(a_3r_1+b_3)], \end{aligned} \tag{18}$$

$$A_2 = -\frac{1}{\sqrt{4p_1-3}} [v_1(1)(a_1r_2+b_1) + (p_1v_2(1) + (1-p_1)v_4(1))(a_2r_2+b_2) + ((p_2-p_1)v_2(1) + (1-p_2)v_3(1))(a_3r_2+b_3)],$$

$$A_3 = c_1 [v_1(1) + (1-p_1)v_4(1) + p_2v_2(1) + (1-p_2)v_3(1)]$$

$$A_4 = v_1(1)d_1 + (p_1v_2(1) + (1-p_1)v_4(1))d_2 + ((p_2-p_1)v_2(1) + (1-p_2)v_3(1))d_3.$$

El siguiente paso es calcular los desarrollos de Laurent de cada fracción simple de la Ec. (17) y sustituirlos en la Ec. (17), obteniendo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [v_1(m)] = & A_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_1^n}{z^{n+1}} + A_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_2^n}{z^{n+1}} + A_3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{z^{n+2}} + A_4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \tag{19} \\ = & A_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_1^{n-1}}{z^n} + A_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_2^{n-1}}{z^n} + A_3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{z^n} + A_4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \\ = & \frac{A_1+A_2+A_4}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_1r_1^{n-1}+A_2r_2^{n-1}+A_3(n-1)+A_4}{z^n} \end{aligned}$$

Los coeficientes de la última serie de la Ec. (19) forman una sucesión, que es la transformada inversa de $\mathcal{L} [v_1(m)]$, es decir, esa sucesión es $v_1(m)$:

$$v_1(0) = 0, \tag{20}$$

$$v_1(m) = A_1r_1^{m-1} + A_2r_2^{m-1} + A_3(m-1) + A_4, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

2.3.3. Caso 2. Raíces complejas

En el caso de raíces complejas se sigue un desarrollo similar al caso de raíces reales. Para simplificar, las raíces complejas se expresan del siguiente modo:

$$\mu + i\sigma = \frac{-1 + i\sqrt{3-4p_1}}{2}, \quad \mu - i\sigma = \frac{-1 - i\sqrt{3-4p_1}}{2}$$

la descomposición para $j = 1, 2, 3$ es:

$$\frac{a_jz+b_j}{z^2-z-p_1+1} = \frac{1}{2} \left[\left(a_j - \frac{a_j\mu+b_j}{\sigma} i \right) \frac{1}{z-(\mu+i\sigma)} + \left(a_j + \frac{a_j\mu+b_j}{\sigma} i \right) \frac{1}{z-(\mu-i\sigma)} \right] \tag{21}$$



El segundo miembro de la Ec. (21) lo sustituimos en la Ec. (14), y éstas a su vez en la Ec. (13) y seguimos el mismo procedimiento que en el caso de raíces reales. Se obtiene el siguiente resultado:

$$\mathcal{L} [v_1 (m)] = B_1 \frac{1}{z-(\mu+\sigma i)} + B_2 \frac{1}{z-(\mu-\sigma i)} + A_3 \frac{1}{(z-1)^2} + A_4 \frac{1}{z-1} \quad (22)$$

Donde:

$$B_1 = \frac{1}{2} \left[v_1 (1) \left(a_1 - \frac{a_1 \mu + b_1}{\sigma} i \right) + (p_1 v_2 (1) + (1-p_1) v_4 (1)) \left(a_2 - \frac{a_2 \mu + b_2}{\sigma} i \right) + ((p_2 - p_1) v_2 (1) + (1-p_2) v_3 (1)) \left(a_3 - \frac{a_3 \mu + b_3}{\sigma} i \right) \right] \quad (23)$$

$$B_2 = \frac{1}{2} \left[v_1 (1) \left(a_1 + \frac{a_1 \mu + b_1}{\sigma} i \right) + (p_1 v_2 (1) + (1-p_1) v_4 (1)) \left(a_2 + \frac{a_2 \mu + b_2}{\sigma} i \right) + ((p_2 - p_1) v_2 (1) + (1-p_2) v_3 (1)) \left(a_3 + \frac{a_3 \mu + b_3}{\sigma} i \right) \right]$$

$$A_3 = c_1 [v_1 (1) + (1-p_1) v_4 (1) + p_2 v_2 (1) + (1-p_2) v_3 (1)]$$

$$A_4 = v_1 (1) d_1 + (p_1 v_2 (1) + (1-p_1) v_4 (1)) d_2 + ((p_2 - p_1) v_2 (1) + (1-p_2) v_3 (1)) d_3$$

Incluyendo los desarrollos de Laurent es posible escribir de forma simplificada la Eq. (22).

$$\mathcal{L} [v_1 (m)] = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n (Re(B_1) \cos n\omega - Im(B_1) \sin n\omega)}{z^{n+1}} + A_3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{z^{n+2}} + A_4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \quad (24)$$

$$= \frac{2Re(B_1) + A_4}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2r^{n-1} (Re(B_1) \cos(n-1)\omega - Im(B_1) \sin(n-1)\omega) + A_3(n-1) + A_4}{z^n}$$

La transformada inversa de $\mathcal{L} [v_1 (m)]$, es la sucesión cuyos términos son los coeficientes de la serie la Ec. (24):

$$v_1 (0) = 0 \quad (25)$$

$$v_1 (m) = 2r^{m-1} (Re (B_1) \cos (m-1) \omega - Im (B_1) \sin (m-1) \omega) + A_3 (m-1) + A_4$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

2.4. Optimización del retorno medio acumulado

Para calcular el intervalo preventivo que maximiza el retorno medio acumulado, se deriva este retorno respecto del intervalo preventivo τ . De igual forma que cuando se calculó el retorno medio acumulado, hay que considerar por separado el caso de raíces reales y por otro el de raíces complejas.



2.4.1. Optimización del retorno medio acumulado para el caso de raíces reales

A partir de la expresión explícita de $v_1(m)$, Ec. (20), se procede a su optimización, para valores de τ . Para ello calculamos la derivada:

$$\frac{dv_1(m)}{d\tau} = r_1^{m-1} \frac{dA_1}{d\tau} + r_2^{m-1} \frac{dA_2}{d\tau} + (m-1) \frac{dA_3}{d\tau} + \frac{dA_4}{d\tau} \quad (26)$$

Únicamente p_2 depende de τ , así que habrá que derivar aquellas expresiones en las que aparezca p_2 y aquellas en las que aparezca τ explícitamente. De acuerdo con esta observación:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{d\tau} &= \frac{1}{\sqrt{4p_1-3}} \left[(1-p_1) (a_2 r_1 + b_2) \frac{dv_4(1)}{d\tau} + (v_2(1) - v_3(1)) (a_3 r_1 + b_3) \frac{dp_2}{d\tau} \right] \quad (27) \\ \frac{dA_2}{d\tau} &= \frac{-1}{\sqrt{4p_1-3}} \left[(1-p_1) (a_2 r_2 + b_2) \frac{dv_4(1)}{d\tau} + (v_2(1) - v_3(1)) (a_3 r_2 + b_3) \frac{dp_2}{d\tau} \right] \\ \frac{dA_3}{d\tau} &= c_1 \left[(1-p_1) \frac{dv_4(1)}{d\tau} + (v_2(1) - v_3(1)) \frac{dp_2}{d\tau} \right] \\ \frac{dA_4}{d\tau} &= d_2 (1-p_1) \frac{dv_4(1)}{d\tau} + d_3 (v_2(1) - v_3(1)) \frac{dp_2}{d\tau} \end{aligned}$$

De la Ec. (11) tomamos $v_4(1)$, lo simplificamos, sustituimos D por (7) y p_1 y p_2 por $F(\tau')$ y $F(\tau)$ respectivamente, de modo que $v_4(1)$ queda:

$$v_4(1) = R_{42} + \frac{1}{1-p_1} \left[R_4 \int_{\tau'}^{\tau} (t-\tau') f(t) dt + (1-F(\tau)) \left((\tau-\tau') R_4 + R_{43} - R_{42} \right) \right] \quad (28)$$

Y su derivada:

$$\frac{dv_4(1)}{d\tau} = \frac{1}{1-p_1} \left[f(\tau) (R_{42} - R_{43}) + (1-F(\tau)) R_4 \right] \quad (29)$$

Ya podemos incorporar la Ec. (29) a cada una de las expresiones (27) y sumarlas para obtener la Ec. (26). Se hace de dos en dos sumandos. Obteniendo la siguiente expresión:

$$\frac{dv_1(m)}{d\tau} = M_1 (1-F(\tau)) + M_2 f(\tau) \quad (30)$$

Donde M_1 y M_2 son:

$$\begin{aligned} M_1 &= R_4 \left[\frac{1}{\sqrt{4p_1-3}} (a_2 (r_1^m - r_2^m) + b_2 (r_1^{m-1} - r_2^{m-1})) \right. \\ &\quad \left. + (m-1) c_1 + d_2 \right], \quad (31) \\ M_2 &= (R_{42} - R_{43}) \left[\frac{1}{\sqrt{4p_1-3}} (a_2) (r_1^m - r_2^m) \right. \\ &\quad \left. + b_2 (r_1^{m-1} - r_2^{m-1}) + (m-1) c_1 + d_2 \right] + (v_2(1) \\ &\quad - v_3(1)) \left[\frac{1}{\sqrt{4p_1-3}} (a_3 (r_1^m - r_2^m) \right. \\ &\quad \left. + b_3 (r_1^{m-1} - r_2^{m-1}) + (m-1) c_1 + d_3 \right] \end{aligned}$$

2.4.2. Optimización del retorno medio acumulado para el caso de raíces complejas

Se procede como en el caso real, derivando en este caso la Ec. (25):

$$\frac{dv_1(m)}{d\tau} = M_1 (1-F(\tau)) + M_2 f(\tau) \quad (32)$$



Los coeficientes M_1 y M_2 en el caso complejo son:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= R_4 \left((a_2 \cos(m-1)\omega + \frac{a_2\mu+b_2}{\sigma} \sin(m-1)\omega) \cdot r^{m-1} + (m-1)c_1 + d_2 \right) \\
 M_2 &= r^{m-1} \left[\cos(m-1)\omega (a_2(R_{42}-R_{43}) + a_3(v_2(1)-v_3(1))) \right. \\
 &\quad \left. + \sin(m-1)\omega \left(\frac{a_2\mu+b_2}{\sigma} (R_{42}-R_{43}) + \frac{a_3\mu+b_3}{\sigma} (v_2(1)-v_3(1)) \right) \right] + \\
 &\quad \left((R_{42}-R_{43})((m-1)c_1 + d_2) + (v_2(1)-v_3(1))((m-1)c_1 + d_3) \right) \quad (33)
 \end{aligned}$$

2.4.3. Cálculo de la expresión matemática del intervalo preventivo óptimo

Supongamos que los fallos se distribuyen según una distribución Weibull con parámetro de forma α , parámetro de escala β y vida garantizada γ . Entonces las funciones de densidad de probabilidad $f(t)$ y distribución $F(t)$ son:

$$f(t) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{t-\gamma}{\beta} \right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\beta}\right)^\alpha}, \quad F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\beta}\right)^\alpha}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Al sustituirlas en la Ec. (32) o en la Ec. (30), resulta:

$$\frac{dv_1(m)}{d\tau} = M_1 e^{-\left(\frac{\tau-\gamma}{\beta}\right)^\alpha} + M_2 \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\tau-\gamma}{\beta} \right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{\tau-\gamma}{\beta}\right)^\alpha}. \quad (34)$$

Al igualar la Ec. (34) a cero, se elimina el factor común no nulo $e^{-(\tau-\gamma/\beta)^\alpha}$ de modo que quedará:

$$M_1 + M_2 \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\tau-\gamma}{\beta} \right)^{\alpha-1} = 0. \quad (35)$$

Si $M_2 \neq 0$, se puede escribir la ecuación que define el intervalo preventivo óptimo:

$$\tau_o = \left(-\frac{\beta^\alpha}{\alpha} \cdot \frac{M_1}{M_2} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} + \gamma \quad (36)$$

El rango de valores que puede tomar τ_o es el intervalo $(0, \infty)$ si $0 < \alpha < 1$ y el intervalo $[0, \infty)$ si $\alpha \geq 1$. Para los dos casos, la Ec. (36) tendrá solución no nula, que además es única, si y sólo si M_1 y M_2 son no nulos con signos distintos. Aunque no es imposible, dada la complejidad de M_2 es extremadamente improbable que éste se anule.

3. Análisis y Resultados

Una vez determinados todos los valores de las variables Tabla III, se procede a la aplicación de las ecuaciones matemáticas que se han diseñado. El valor del tiempo para el cual se produce la transición al estado degradado, τ' , es un valor experimental que debe ser incluido en el modelo. Para poder hacer un ejercicio de comparación entre resultados, se van a considerar diferentes valores de τ' , entre 1,000 horas y 8,000 horas, tomados a intervalos de 1,000. Para estos valores de τ' , se debe identificar el tipo de solución (con raíces reales o complejas). Si $4p_1 - 3$ es no negativo se debe usar la ecuación del caso real. Si es negativo, las ecuaciones del caso complejo. Como se



indica en la Tabla IV. Con esta información y a partir de la Ec. (36), con los coeficientes M_1 y M_2 procedentes de la Ec. (33) si se trata del caso complejo, o los coeficientes de la Ec. (31) si se trata del caso real, se obtienen los valores del intervalo preventivo óptimo (tercera fila) cuando el número de transiciones es $m = 10$ (Tabla IV).

Tabla 4

Valores del intervalo preventivo óptimo τ_o y retorno medio acumulado $v_1(10)$ para distintos intervalos de tiempo hasta la degradación τ' , en la transición $m = 10$.

| Caso | Complejo | Complejo | Complejo | Complejo | Complejo | Complejo | Real | Real |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|--------|--------|
| τ' (horas) | 1,000 | 2,000 | 3,000 | 4,000 | 5,000 | 6,000 | 7,000 | 8,000 |
| $v_1(10)$ (€) | 39,364 | 47,744 | 55,695 | 61,412 | 66,996 | 74,656 | 78,585 | 78,166 |
| τ_o (horas) | 6,042 | 6,061 | 6,115 | 6,164 | 6,159 | 6,146 | 6,184 | 6,229 |

Los valores de la tabla correspondientes a $\tau' \geq 7,000$ evidentemente no son significativos ya se alcanzaría el tiempo de mantenimiento preventivo antes que el tiempo hasta la degradación. Pese a todo se muestran en cursiva los valores que ofrecen las fórmulas, en este caso para raíces reales.

Para valores mayores de m , los valores de τ_o van disminuyendo a medida que aumenta m , hasta alcanzar el valor 6,040 cuando m es muy grande. En la Tabla V se expresa esta tendencia para $m = 60$. La velocidad con que estos datos alcanzan ese valor límite depende de los datos de entrada al modelo.

Tabla 5

Valores del intervalo preventivo óptimo τ_o y retorno medio acumulado $v_1(60)$ para distintos intervalos de tiempo hasta la degradación τ' , en la transición $m = 60$.

| τ' (horas) | 1,000 | 2,000 | 3,000 | 4,000 | 5,000 | 6,000 | 7,000 | 8,000 |
|------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $v_1(60)$ (€) | 228,956 | 252,718 | 283,371 | 318,087 | 361,095 | 407,152 | 444,591 | 464,327 |
| τ_o (horas) | 6,040 | 6,043 | 6,056 | 6,057 | 6,057 | 6,057 | 6,057 | 6,059 |

Si usamos la formulación del modelo de tres estados (sin estado degradado) (22), utilizando los mismos datos, se obtienen los valores $\tau_o = 6,617$ cuando $R_1 = R_4 = 5$ y $\tau_o = 6,040$ cuando $R_1 = R_4 = 4$. Esos mismos resultados también se obtienen cuando en el modelo de cuatro estados igualamos los valores $R_1 = R_4$. La expresión matemática para del intervalo preventivo óptimo τ_o en el caso de tres estados es:

$$(\tau_o - \gamma)^{\alpha - 1} = \frac{\beta^\alpha}{\alpha} \cdot \frac{-R_1}{R_{12} - R_{13} + \frac{2m - 1 - (-1)^{m-1}}{2m + 1 + (-1)^{m-1}} (R_2 B + R_{21} - R_3 C - R_{31})}$$

Los valores explican el comportamiento del valor de τ_o en la Tabla IV, desde 6,042 hasta 6,146. Para un número de transiciones m muy grande, los valores de τ_o son cercanos a 6,040, valor que se alcanza cuando $R_1 = R_4 = 4$. La transición entre los



modelos complejo y real se produce entre los valores de $\tau' = 6,222$ y $\tau' = 6,223$, debido a que $p_1 = F(\tau')$ en el caso complejo toma el valor 0.75 y en el caso real toma el valor 0.7502.

También es posible conocer el comportamiento del τ_o a medida que se incrementan las transiciones m , para un determinado τ' . Concretamente en la Figura 2 se representan los valores del intervalo preventivo óptimo τ_o frente a los valores de m entre 1 y 60, para el valor de $\tau' = 4,000$ horas. En esta figura también se representa el valor de τ_o cuando no existe el estado degradado (3 estados). Si se representasen los valores de τ_o para otros valores de τ' , a medida que se aumenta el valor de τ' la curva azul se desplazaría hacia arriba. Por el contrario, si se disminuye el valor de τ' , la curva se desplazaría hacia abajo. El límite superior del desplazamiento se fija en el valor del τ_o cuando no hay degradación (tres estados-curva naranja), 6,617. Por otro lado, el límite inferior se establece en el valor del τ_o cuando no hay degradación, pero los ingresos $R_1 = R_4$ coinciden. Este valor es 6,040 horas. Esta evidencia también puede ser comprobada con los datos de la Tabla IV y Tabla V.

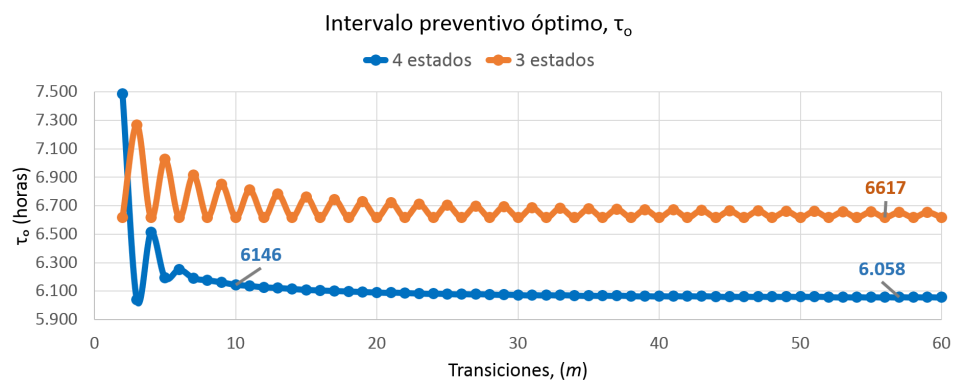


Figura 2

Representación del intervalo preventivo óptimo τ_o , en cada transición m . Caso de 3 estados y 4 estados con $\tau' = 4000$.

Los tiempos medios de permanencia en cada estado se calculan según la expresión: $t_i = \sum_{j=1}^4 p_{ij} r_{ij}$. En el caso de $\tau' = 4,000$ y $\tau_o = 6,040$, los valores medios de la estancia en cada estado (tamaño de la transición) son los siguientes: $S_1 = 3,722$ horas, $S_2 = 72$ horas, $S_3 = 56$ horas, $S_4 = 1,417$ horas.

4. Discusión

Las ecuaciones matemáticas (36), (31) y (33) encontradas para el intervalo preventivo óptimo han sido verificadas por tres métodos distintos. Por un lado, para un determinado valor de τ' se ha calculado el retorno medio acumulado $v_1(m)$ para cada transición m



y para cada τ . De entre todos los valores de τ se ha elegido aquel que maximizaba el retorno medio acumulado. Este valor siempre coincidía con el valor ofrecido por la Ec. (36), tanto en el caso complejo como en el caso real.

Por otro lado, se ha hecho coincidir las dos ecuaciones del intervalo preventivo óptimo en el caso del modelo de cuatro estados con la ecuación del modelo de tres estados (22) y también coinciden las tres ecuaciones.

Finalmente, los resultados obtenidos con el método presentado en el artículo se han comparado con los obtenidos de la simulación Monte Carlo. Para ello, se ha construido un modelo de simulación dinámica mediante simulación estocástica en tiempo continuo. Definición de los estados y posibles transiciones, así como el retorno asociado a las transiciones y la permanencia en los diferentes estados.

La metodología utilizada se puede consultar en (35). Se realizan 200 simulaciones por escenario y seis de los muchos escenarios estudiados se referencian como se presenta en la Tabla IV (con una variación de τ' de 1,000 a 6,000 horas). Cada simulación tiene un horizonte temporal de 30.000 horas.

En la Tabla VI se verifican los resultados obtenidos en la Tabla IV. Se puede comprobar cómo los valores medios de los resultados de sensibilidad se obtienen muy cerca en la Tabla IV para los retornos después de 10 transiciones.

Table VI. Simulación Monte Carlo. Valores de $v_1(10)$, después de 10 transiciones, para diferentes valores de τ y τ' .

Tabla 6

| Escenario ($\tau' - \tau$) | Count | Min | Max | Mean | Median | StDev |
|--------------------------------|-------|-----------|-----------|-----------|----------|----------|
| $\tau' = 6,000 - \tau = 6,146$ | 200 | \$ 34,210 | \$106,736 | \$ 75,184 | 74,397 € | 14,517 € |
| $\tau' = 5,000 - \tau = 6,159$ | 200 | \$ 34,210 | \$ 93,901 | \$ 67,427 | 67,537 € | 11,914 € |
| $\tau' = 4,000 - \tau = 6,164$ | 200 | \$ 30,568 | \$ 85,901 | \$ 60,747 | 61,358 € | 11,869 € |
| $\tau' = 3,000 - \tau = 6,115$ | 200 | \$ 23,716 | \$ 83,167 | \$ 55,357 | 57,067 € | 10,806 € |
| $\tau' = 2,000 - \tau = 6,061$ | 200 | \$ 19,526 | \$ 74,191 | \$ 47,232 | 48,343 € | 10,439 € |
| $\tau' = 1,000 - \tau = 6,042$ | 200 | \$ 11,526 | \$ 66,021 | \$ 39,220 | 40,429 € | 10,627 € |

En la Figura 3, se presenta un gráfico que contiene los resultados de sensibilidad para el escenario de $\tau' = 4,000$ y $\tau = 6,164$. La variable representada es retorno medio acumulado tras 10 transiciones $v_1(10)$ y los límites de confianza marcan los percentiles para el total de 200 simulaciones durante el horizonte de tiempo simulado (30 000 horas). La gráfica de valor medio se incluye en rojo (terminando en 55,357 como se presenta en la Tabla VI).

En este trabajo se ha calculado el retorno medio acumulado partiendo del estado operativo, $v_1(m)$. De la misma manera se puede calcular el retorno medio acumulado

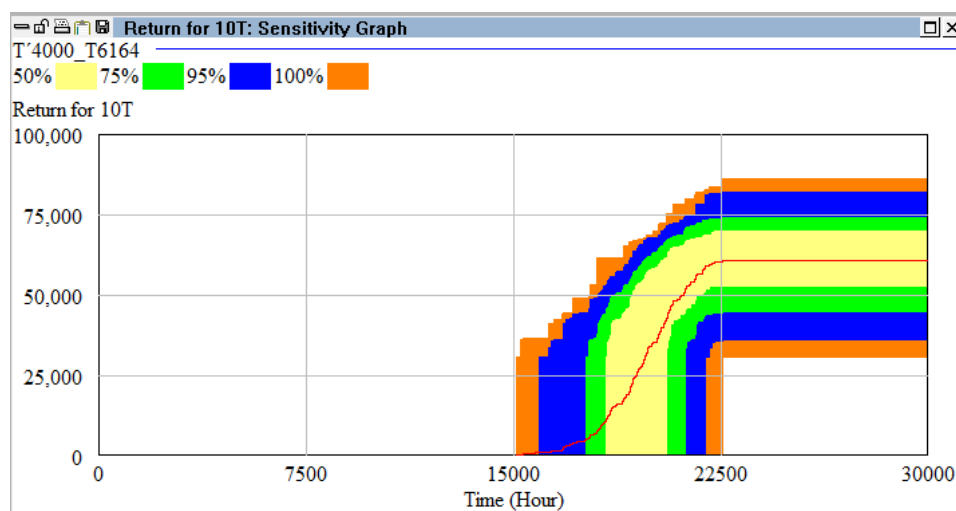


Figura 3

Muestra de resultados de sensibilidad para el escenario ($\tau' = 4,000$, $\tau = 6,164$). Límites de confianza en colores, gráfico del valor medio en rojo.

partiendo de los otros tres estados $v_2(m)$, $v_3(m)$ y $v_4(m)$. A partir de esas expresiones también se puede calcular los intervalos preventivos óptimos para esos puntos de partida.

5. Conclusiones

La mayoría de los equipos instalados en vehículos o plantas industriales están sujetos a desgaste. El tamaño óptimo del intervalo de mantenimiento preventivo es esencial para minimizar los costes de mantenimiento de un negocio. Para su cálculo, uno de los datos a considerar es el ingreso por hora de funcionamiento. Cuando se produce una variación en este valor, el intervalo preventivo óptimo se ve afectado. El ingeniero responsable del mantenimiento debe detectar este hecho y modificar el intervalo preventivo.

Este artículo presenta una fórmula matemática para encontrar el intervalo preventivo óptimo cuando se produce una degradación que afecta a los ingresos o éstos se modifican como consecuencia del mercado. Se diseña un modelo matemático con ingresos y costes que aparecen como consecuencia de las estancias y transiciones en los distintos estados. El retorno medio acumulado es la variable que los contabiliza. Esta variable depende de las probabilidades de transición, los tiempos de permanencia y los retornos de cada estado. Mediante el uso de transformadas z es posible resolver el sistema de ecuaciones en diferencias que se generan al modelar un sistema de cuatro estados, operativo, correctivo, preventivo y operativo degradado. El sistema



evoluciona entre los estados según una cadena de Markov embebida en un proceso semi-markoviano.

La expresión alcanzada para el intervalo preventivo depende del ingreso en estado degradado R_4 y de los costes en el estado degradado antes de alcanzar los estados: correctivo R_{42} y preventivo R_{43} . También depende de la probabilidad de fallo del sistema cuando se produce la degradación p_1 , y de los costes de una avería $v_2(1)$ y de una intervención preventiva $v_3(1)$.

Una vez obtenida la herramienta, se ha aplicado a un caso práctico, constatándose las siguientes observaciones:

El valor del ingreso R_4 es un valor importante para el cálculo del intervalo preventivo. Pocos negocios tienen en cuenta este dato al programar sus actividades de mantenimiento.

Una vez que se detecta la degradación, se puede seguir utilizando el activo, aunque es necesario reducir el intervalo preventivo inicialmente establecido.

El valor del nuevo intervalo preventivo óptimo se acerca al valor del intervalo preventivo si el ingreso R_1 se reduce hasta coincidir con el ingreso del estado degradado.

El valor del nuevo intervalo preventivo coincidiría con valor del intervalo preventivo si el ingreso coincide con el ingreso del estado degradado, cuando realizamos un número elevado de transiciones, m .

Habitualmente en la ejecución del mantenimiento no se puede considerar un número elevado de transiciones, por lo que la fórmula desarrollada es fundamental, al permitir calcular el óptimo cuando se tiene un número pequeño de transiciones.

Esta herramienta es muy fácil de aplicar porque es la misma para todos los activos y sólo requiere dar valores a las variables. Además, no requiere modelar uno a uno los distintos equipos ni buscar una solución óptima con complejos métodos numéricos.

Para este desarrollo se han utilizado datos económicos, pero se podría haber utilizado alguna otra función objetivo relacionada con la disponibilidad, seguridad, medioambiente, emisiones o consumo de combustible.

References

- [1] Yang L, Zhao Y, Peng R, Ma X. Hybrid preventive maintenance of competing failures under random environment. *Reliab Eng Syst Saf.* 2018;174:130–40.
- [2] Zhong S, Pantelous AA, Goh M, Zhou J. A reliability-and-cost-based fuzzy approach to optimize preventive maintenance scheduling for offshore wind



- farms. *Mech Syst Signal Process* [Internet]. 2019;124:643-63. Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2019.02.012>.
- [3] Lyubchenko A, Pacheco J, Kopytov E, Lutchenko S, Maystrenko V, Bartosh S. An approach for optimal maintenance planning of radio communication devices considering reliability and operational costs. En: *Moscow Workshop on Electronic and Networking Technologies, MWENT 2018 - Proceedings*. 2018. p. 1-5. <https://doi.org/10.1109/MWENT.2018.8337301>.
- [4] de Jonge B, Scarf PA. A review on maintenance optimization. *Eur J Oper Res*. 2020;285(3):805–24.
- [5] Młynarski S, Pilch R, Smolnik M, Szybka J, Wiązania G. A model of an adaptive strategy of preventive maintenance of complex technical objects. *Ekspluat i Niezawodn*. 2020;22(1):35–41.
- [6] Legát V, Mošna F, Aleš Z, Jurča V. Preventive maintenance models – higher operational reliability. *Ekspluat i Niezawodn - Maint Reliab*. 2016;19(1):134-41.
- [7] Sembiring N, Panjaitan N, Angelita S. Design of preventive maintenance system using the reliability engineering and maintenance value stream mapping methods in PT. XYZ. *IOP Conf Ser Mater Sci Eng*. 2018;309(1). <https://doi.org/10.1088/1757-899X/309/1/012128>.
- [8] Hu J, Shen J, Shen L. Periodic preventive maintenance planning for systems working under a Markovian operating condition. *Comput Ind Eng* [Internet]. 2020;142(January):106291. Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2020.106291>.
- [9] Wang B, Wang X, Bie Z, Judge PD, Wang X, Green TC. Reliability model of MMC considering periodic preventive maintenance. *IEEE Trans Power Deliv*. 2017;32(3):1535–1544.
- [10] Zhao X, Chen M, Nakagawa T. Periodic replacement policies with shortage and excess costs. *Ann Oper Res* [Internet]. 2020; Disponible en: <https://doi.org/10.1007/s10479-020-03566-z>.
- [11] Zhao X, Cai J, Mizutani S, Nakagawa T. Preventive replacement policies with time of operations, mission durations, minimal repairs and maintenance triggering approaches. *J Manuf Syst* [Internet]. 2021;61:819-29. Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2020.04.003>.
- [12] Semaan NM, Yehia N. A stochastic detailed scheduling model for periodic maintenance of military rotorcraft. *Aircr Eng Aerosp Technol*. 2019;91(9):1195–204.
- [13] Liu Q, Dong M, Frank Chen F, Liu W, Ye C. Multi-objective imperfect maintenance optimization for production system with an intermediate buffer. *J Manuf Syst* [Internet]. 2020;56(July):452-62. Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2020.07.002>.



- [14] Ruschel E, Santos EAP, Loures E de FR. Industrial maintenance decision-making: A systematic literature review. *J Manuf Syst* [Internet]. 2017;45:180-194. Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2017.09.003>.
- [15] Kumar G, Varghese JP. Optimum preventive maintenance policy for a mechanical system using Semi-Markov method and Golden section technique. En: 2018 IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM). Bangkok; 2018. p. 232-236.
- [16] Yi H, Cui L, Shen J, Li Y. Stochastic properties and reliability measures of discrete-time semi-Markovian systems. *Reliab Eng Syst Saf*. 2017 May;2018(176):162–173.
- [17] Wu B, Maya BI, Limnios N. Using Semi-Markov chains to solve semi-markov processes. *Methodol Comput Appl Probab*. 2021;23(4):1419–1431.
- [18] Farahani A, Tohidi H, Shoja A. An integrated optimization of quality control chart parameters and preventive maintenance using Markov chain. *Adv Prod Eng Manag*. 2019;14(1):5–14.
- [19] Gu X, Guo W, Jin X. Performance evaluation for manufacturing systems under control-limit maintenance policy. *J Manuf Syst*. 2020;55(March):221–32.
- [20] Zhu X, Zhao F, Li J, Bai Y, Hu Q. Maintenance optimization based on three-stage failure process under performance-based contracting. *Math Probl Eng*. 2021;2021. <https://doi.org/10.1155/2021/6323844>.
- [21] Mizutani S, Zhao XN. WIB (Which-Is-Better) Problems in maintenance reliability policies. In: Misra KB, editor. *Handbook of Advanced Performability Engineering*. Cham: Springer; 2021. pp. 523–47.
- [22] Sánchez Herguedas A, Crespo Márquez A, Rodrigo Muñoz F. Optimizing preventive maintenance over a finite planning horizon in a semi-Markov framework. *IMA J Manag Math* [Internet]. 2022;33(1):75-99. Disponible en: <https://doi.org/10.1093/imaman/dpaa026>.
- [23] Sánchez-Herguedas A, Mena-Nieto A, Rodrigo-Muñoz F. A new analytical method to optimise the preventive maintenance interval by using a Semi-Markov process and z-transform with an application to marine diesel engines. *Reliab Eng Syst Saf*. 2021 Mar;2021(207):1–15.
- [24] Sánchez-Herguedas A, Mena-Nieto A, Rodrigo-Muñoz F, Villalba-Díez J, Ordieres-Meré J. Optimisation of maintenance policies based on right-censored failure data using a semi-Markovian approach. *Sensors* [Internet]. 2022;22(4)(1432):1-18. Disponible en: <https://www.mdpi.com/1424-8220/22/4/1432> <https://doi.org/10.3390/s22041432>.
- [25] Sánchez-Herguedas A, Crespo-Márquez A, Rodrigo-Muñoz F. Optimising the preventive maintenance interval using a Semi-Markov process, z-transform, and



- finite planning horizon. En: González-Prida V, Márquez CAP, Márquez AC, editores. Cases on Optimizing the Asset Management Process [Internet]. 2022.a ed. Hershey, PA: IGI Global; 2022 [citado 13 de octubre de 2021]. p. 137-61. Disponible en: <http://services.igi-global.com/resolvedoi/resolve.aspx?doi=10.4018/978-1-7998-7943-5.ch006> <https://doi.org/10.4018/978-1-7998-7943-5.ch006>.
- [26] Sánchez-Herguedas A, Mena-Nieto A, Rodrigo-muñoz F, Villalba-Díez J. Aplicación de enfoques Semimarkovianos a la mejora de políticas de mantenimiento predeterminado en activos industriales. En: Tomás de J. Mateo Sanguino, José Manuel Lozano Domínguez, Manuel Joaquín Redondo González, Iñaki Josep Fernández de Viana González MÁRR, editor. Actas de las IV Jornadas ScienCity 2021 Fomento de la Cultura Científica, Tecnológica y de Innovación en Ciudades Inteligentes. Huelva; 2022. p. 23-6.
- [27] Kong X, Yang J, Li L. Remaining useful life prediction for degrading systems with random shocks considering measurement uncertainty. *J Manuf Syst* [Internet]. 2021;61(December 2020):782-98. Disponible en: <https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2021.05.019>.
- [28] Baklouti A, Mifdal L, Dellagi S, Chelbi A, Al Madina B, Tillila Q, et al. An optimal preventive maintenance policy for a solar photovoltaic system [Internet]. *Sustainability (Basel)*. 2020;12(10):13.
- [29] Pandey M, Zuo MJ, Moghaddass R. Selective maintenance scheduling over a finite planning horizon. *Proc Inst Mech Eng Part O J Risk Reliab* [Internet]. 16 de agosto de 2015;230(2):162-77. Disponible en: <https://doi.org/10.1177/1748006X15598914>.
- [30] Vadalá F, Bacigalupo A, Lepidi M, Gambarotta L. Free and forced wave propagation in beam lattice metamaterials with viscoelastic resonators. *Int J Mech Sci*. 2020 Sep;2021:193.
- [31] Mikhlin D. Analytic discrete transparent boundary conditions for high-order Padé parabolic equations. *Wave Motion*. 2008;45(7-8):881–94.
- [32] Genschel U, Meeker WQ. A comparison of maximum likelihood and median-rank regression for Weibull estimation. *Qual Eng*. 2010;22(4):236–55.
- [33] Olteanu D, Freeman L. The evaluation of Median-Rank Regression and Maximum Likelihood Estimation techniques for a two-parameter Weibull distribution. *Qual Eng* [Internet]. 2010;22(4):256-72. Disponible en: <https://www.tandfonline.com/action/journalInformation?journalCode=lqen20> <https://doi.org/10.1080/08982112.2010.505219>.
- [34] Assis EM, Figueirôa Filho CL, Lima GC, Salles GM, Pinto A. Salles GM de O, Pinto A. Comparison between maintenance policies based on q-Weibull and Weibull models. *Int J Qual Reliab Manage*. 2022;39(1):258–79.



- [35] Crespo Márquez A. Dynamic modelling for supply chain management: Dealing with front-end, back-end and integration issues. Springer London; 2010.