



Conference Paper

Métodos de Interpolación Basados en Funciones de Base Radial con Aplicaciones a la Reconstrucción de Imágenes

Rodrigo Combe and Idulfo Arrocha

Universidad Tecnológica de Panamá, Panamá, Panamá

Abstract

This article presents the Radial Base Functions (RBFs) as a functional interpolation method for implicit surface reconstruction from points cloud. These methods allow not only to improve inaccuracies resulting from scanners, but also possible discontinuities that occur in the point clouds. The complexity of three-dimensional objects makes reconstruction difficult since devices such as scanners do not always faithfully reproduce the objects, which can lead to information gaps or an incomplete reconstruction. Interpolation methods based on RBFs allow to correct these errors. Three-dimensional surface reconstruction has wide applications in biomedical engineering, in the design of industrial parts, among others. With the algorithm, we developed we have been able to make reconstructions of both explicit and implicit functions, in two and three dimensions.

Corresponding Author:

Idulfo Arrocha

idulfo.arrocha@utp.ac.pa

Received: 15 November 2017

Accepted: 5 January 2018

Published: 4 February 2018

Publishing services provided
by Knowledge E

© Rodrigo Combe and Idulfo Arrocha. This article is distributed under the terms of the [Creative Commons Attribution License](#), which permits unrestricted use and redistribution provided that the original author and source are credited.

Selection and Peer-review under the responsibility of the ESTEC Conference Committee.

Keywords: Radial Basis Functions, Three-dimensional reconstruction, Interpolation Methods.

Resumen

En este artículo se presentan las Funciones de Base Radial (RBFs) como un método de interpolación funcional para la reconstrucción de superficies a partir de funciones implícitas y de nube de puntos. Estos métodos permiten no solo mejorar las imprecisiones que provienen de los escáneres sino también permite corregir las posibles discontinuidades que se producen en la nube de puntos. La complejidad de los objetos tridimensionales hace difícil su reconstrucción ya que los dispositivos como los escáner no siempre reproducen fielmente los objetos, lo cual puede ocasionar vacíos de información o una reconstrucción incompleta. Los métodos de interpolación basados en RBFs permiten corregir estos errores. La reconstrucción tridimensional de superficies tiene amplia aplicación en ingeniería biomédica, en el diseño de piezas industriales, entre otros. Con el algoritmo que desarrollamos hemos podido hacer reconstrucciones de funciones tanto explícitas como implícitas en dos y tres dimensiones.



Palabras claves: Funciones de Base Radial, Reconstrucción tridimensional, Métodos de Interpolación.

1. Introducción

La reconstrucción tridimensional es utilizada hoy día para la generación de modelos tanto de piezas a nivel industrial como en ingeniería biomédica para modelar todo tipo de órganos y para el diseño de prótesis. Durante las últimas tres décadas este problema ha recibido mucha atención y estudio por parte de investigadores en el área de la simulación matemática y de la ingeniería en sistemas, ya que la reconstrucción de superficies tiene múltiples aplicaciones ya que es utilizada para desarrollar todo tipo de simulaciones en procesos de diseños en ingeniería, en medicina, en topografía, el modelado de máquinas o herramientas (ingeniería inversa), restauración de piezas arqueológicas, diseño industrial de componentes complejos, etc.

En la actualidad existen muchos objetos con formas y volúmenes complejos que son difíciles de modelar digitalmente a través de un escáner 3D, por lo que el uso de estos escáneres para la digitalización de superficies no siempre reproduce fielmente el objeto original. Por otro lado, se requieren múltiples vistas del objeto y a la hora de integrar la imagen estas vistas pueden verse afectadas por vacíos de información. En algunos casos, la naturaleza y complejidad de ciertos objetos hacen que el proceso de escaneado de los mismos no permita una correcta captura de los datos. Todo esto unido a posibles errores de oclusión y baja reflectancia pueden llevar a una reconstrucción incorrecta o incompleta del objeto o pieza que se esté escaneando.

Existen diversos métodos para la reconstrucción de superficies, cuya finalidad es a partir de una nube de puntos reproducir lo más fielmente el objeto original. En este artículo se presentan las funciones de base radial como un método de interpolación funcional para la reconstrucción de superficies y objetos de la vida diaria. Estos métodos permiten no solo mejorar las imprecisiones que provienen de los escáneres sino también permite corregir las posibles discontinuidades que se producen en la nube de puntos.

2. Planteamiento del problema

La reconstrucción de formas tridimensionales es un procedimiento cuya finalidad es reproducir a través de un ordenador objetos de la vida diaria (herramientas, órganos, etc.) tratando de conservar sus propiedades físicas y topológicas tales como su estructura, sus dimensiones y su volumen (Echeverri et. al.,2009). El objetivo de la reconstrucción tridimensional es a partir de una nube de puntos reproducir lo más fielmente el objeto original. Las nubes de puntos son obtenidas a través de escáneres 3D o de tomografías computarizadas, los cuales miden de forma mecánica puntos en la superficie del objeto y generan en un archivo (fichero) un conjunto de datos o nube de puntos.

Una nube de puntos es un conjunto de vértices (x, y, z) en un sistema de tres coordenadas (Arevalo, 2014). Más específicamente, una nube de puntos de un objeto consiste en representaciones de la superficie externa del mismo.

El problema que queremos resolver en esta investigación es:

Dada una nube de puntos:

$$X = \left\{ (x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3 \right\}, \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

que pertenecen a una Superficie S , esto es $X \subset S$, el objetivo es encontrar una superficie S^* , la cual es una reconstrucción de S . Donde S se define como la superficie de todos los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisface la ecuación implícita $f(x, y, z) = 0$, donde f puede ser una función conocida o desconocida. Si la función f es conocida se dice que la superficie es explícita mientras que si se desconoce la misma debido a que la nube de puntos es una muestra de datos que proviene ya sea de un tomógrafo o de un escáner, se dice que la superficie es implícita. Independientemente del método utilizado, el proceso de reconstrucción de superficies debe seguir ciertas etapas: adquisición de los datos, registro, integración, segmentación y ajuste de superficies (Branch,2007).

3. Métodos de interpolación basados en Funciones de base radial

La interpolación mediante funciones de base radial (RBFs) conforma un método de aproximación, introducido por primera vez en 1968 en la Universidad Estatal de Iowa por Rolland Hardy (Ortega, 2009), que utiliza una curva matemática para suavizar la representación de la variación espacial en dos y tres dimensiones. Las funciones de

base radial son un interpolador bastante exacto y su cálculo y costo computacional es moderadamente rápido.

3.1. Funciones de base radial

La idea básica de los métodos de interpolación basados en RBFs es: dada una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ésta se puede aproximar mediante su expansión con un conjunto de funciones de base radial mediante una interpolante g la cual se puede expresar de la forma

$$g(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \psi(r); \quad r = \|x - \alpha_i\|, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

donde ψ es una función univariada comúnmente llamada núcleo de la función, los puntos $\alpha_i \in \mathbb{R}^n$ son llamados centros de la función, $r = \|x - \alpha_i\|$ es la distancia euclídea de un punto x al centro α_i y los valores λ_i son escalares reales denominados pesos asociados a cada centro (Morse, 2001). Por tanto, resolver (3.1) equivale a encontrar los coeficientes λ_i imponiendo la condición

$$g(x_i) = f(x_i) \quad (3)$$

Si consideramos un conjunto de puntos finitos $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n\}$ tomados como centros, la condición de interpolación (3) proveen un sistema lineal de la forma $A\lambda = Z$, donde A es una matriz cuadrada de orden n que representa las distancias entre los centros, λ es un vector columna de orden n que representa las incógnitas y Z es un vector columna también de orden n que representa los valores de una función f en los centros.

Los interpolantes de base radial g pueden incluir un parámetro c , llamado parámetro de forma. Este parámetro es no nulo y su selección puede variar dependiendo de cada caso (Echeverri et. al., 2009). El parámetro c es utilizado para controlar la forma de las funciones con efectos sobre el radio de convergencia.

La interpolación con funciones de base radial es una técnica exacta. Esto implica que la superficie debe pasar por cada valor de muestra medido. Su principal ventaja es que a partir de un gran número de datos se producen resultados óptimos para la generación de superficies suaves.

Hay varias funciones de base radial que son ampliamente utilizadas en diversas aplicaciones. De todas estas funciones la que mejor se adapta a los métodos de interpolación para la construcción de superficies es la multicuadrada, $\psi(x) = (r^2 + c^2)^\beta$ con $\beta > 0$, propuesta por Rolland Hardy en 1971 (Ortega, 2009), ya que, de acuerdo a

Richard Franke (Echeverri et. al.,2009), es la que proporciona el método más preciso de interpolación de superficies.

4. Reconstrucción de superficies mediante interpolación con RBFs

El algoritmo para la reconstrucción de las superficies mediante la interpolación con RBFs depende si la superficie que se desea reconstruir es explícita o implícita.

Para una superficie implícita el proceso de interpolación es el siguiente: dada una nube de n puntos dispersos

$$\{(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_3), \dots, (\alpha_n, \beta_n)\} \quad (4)$$

de un objeto o superficie S donde

$$\alpha_i \in \mathbb{R}^d, \quad d = 1, 2, 3 \quad y \quad \beta_i \in \mathbb{R}$$

se pretende construir una función interpolante de base radial g de tal manera que el conjunto de ceros de la función

$$g(\alpha_i) = \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

se aproxime a la superficie original S . La suposición es que los datos verifican una representación funcional explícita: $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(\alpha_i) = \beta_i, i = 1, 2, \dots, n$ y el objetivo es buscar un interpolante de base radial g del objeto S que aproxime a la función f . Es decir, $f(\alpha_i) = g(\alpha_i)$.

La aproximación de la superficie S está dada por combinaciones lineales de traslaciones de una función base, (Chenoweth, 2009)

$$g(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \psi(\|x - \alpha_i\|) \quad (6)$$

la cual es radialmente simétrica con respecto a la norma.

Dependiendo de la selección del núcleo de la función de base radial a utilizar es estrictamente necesario la presencia de una función polinomial

$$g(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \psi(\|x - \alpha_i\|) + h(x) \quad (7)$$

para asegurar que la matriz resultante sea definida positiva. La función $h(x)$ es por lo general polinomial a lo sumo de grado tres. Además, el polinomio h debe verificar que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i h(\alpha_i) = 0 \quad (8)$$

Los valores α_i , ψ y β_j son conocidos y los escalares reales λ_i son calculados resolviendo el sistema de n ecuaciones con n incógnitas determinado por la evaluación del interpolante g en los centros α_j

$$g(\alpha_j) = \beta_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

donde n representa la cantidad de puntos de la muestra de datos. De esta manera tenemos

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \psi(\|\alpha_j - \alpha_i\|) = \beta_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (9)$$

Escribiendo el sistema de ecuaciones de forma matricial.

$$\begin{pmatrix} \psi(\|\alpha_1 - \alpha_1\|) & \psi(\|\alpha_1 - \alpha_2\|) & \dots & \psi(\|\alpha_1 - \alpha_n\|) \\ \psi(\|\alpha_2 - \alpha_1\|) & \psi(\|\alpha_2 - \alpha_2\|) & \dots & \psi(\|\alpha_2 - \alpha_n\|) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi(\|\alpha_n - \alpha_1\|) & \psi(\|\alpha_n - \alpha_2\|) & \dots & \psi(\|\alpha_n - \alpha_n\|) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \quad (10)$$

Si denotamos la matriz de funciones de base radial como A , el vector de escalares como λ y el vector de valores independientes como β , el sistema de ecuaciones queda expresado como $A \lambda = \beta$

Para la reconstrucción de superficies implícitas es necesario calcular la función de distancia signada (FDS) de la superficie. Esta no es más que la distancia $d_S(x)$ desde un punto a la superficie, con signo positivo o negativo, la cual nos indica si el punto está dentro o fuera de la misma.

El proceso de interpolación para este caso sería:

Dado un conjunto de n puntos

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}; \quad \alpha_i \in \mathbb{R}^3, \quad 1 \leq i \leq n$$

debemos encontrar una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ que satisfaga $S = \{x : d_S(x) = 0\}$.

La aproximación de la superficie S definida implícitamente queda determinada por combinaciones lineales de traslaciones de una función base,

$$d_j = d_S(\alpha_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \psi(\|\alpha_j - \alpha_i\|), \quad 1 \leq j \leq n. \quad (11)$$

Los valores α_i , ψ son conocidos y $d(\alpha_j)$ corresponde a la distancia signada de los centros α_j . Los escalares reales λ_i denominados pesos asociados representan las incógnitas y se calculan resolviendo el sistema de n ecuaciones con n incógnitas que resulta

de evaluar la expresión (4.8) para cada $j = 1, 2, \dots, n$. Este sistema queda dado por $A\lambda = D$ con A y λ definidos igual que en (10) y D el vector columna de orden n definido por las distancias signadas.

La distancia signada $d_S(x)$ desde un punto arbitrario p a una superficie cerrada conocida S es la distancia entre p y el punto $z \in S$ más cercano, multiplicado por ± 1 , dependiendo de qué lado de la superficie se encuentra el punto p (Hoppe et. al., 1992).

Para calcular la función distancia signada se toma un conjunto de muestras puntuales $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$; $\alpha_i \in \mathbb{R}^3$, $1 \leq i \leq n$ de una superficie desconocida S y se calcula la distancia signada $d_S(x)$ de un punto arbitrario $x \in \mathbb{R}^3$. La distancia signada $d_S(x)$ del punto p a la superficie S se define como la distancia entre p y su proyección z sobre el plano tangente T_p , cuyo centroide c_i es el más cercano a p , la misma se calcula mediante el producto vectorial siguiente:

$$d_S(p) = \overline{(p - c_i)} \cdot \vec{n}_i. \quad (12)$$

donde $c_i = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \alpha_j^i$ para una vecindad $N_k(\alpha_i) = \{\alpha_1^i, \alpha_2^i, \dots, \alpha_k^i\} \subset S$ del punto α_i y \vec{n}_i es el vector normal de α_i , el cual es el vector propio asociado al menor valor propio de $Cov(\alpha_i)$. Donde $Cov(\alpha_i)$ se define como:

$$Cov(\alpha_i) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (\alpha_j^i - c_i) (\alpha_j^i - c_i)^T. \quad (13)$$

4.1. Construcción de la superficie

El proceso de reconstrucción de la superficie consiste en determinar la isosuperficie asociada a la nube de puntos. Existen varios métodos para la construcción de isosuperficies llamados métodos de renderización de volúmenes. Estos métodos son técnicas usadas para mostrar una proyección 2D (en la pantalla de visualización) de un conjunto de datos discretamente muestreados en 3D. Aunque existen varios métodos para realizar esta tarea, uno de los más utilizados es el algoritmo de Marching Cube. Este algoritmo Consiste básicamente en dividir el espacio en unidades volumétricas denominadas voxeles. Este algoritmo busca reconstruir una superficie mediante polígonos triangulares a través de cortes planos del objeto según el valor umbral especificado por el usuario, el cual depende de la superficie que se desea reconstruir (Lorenson & Cline, 1987).

5. Resultados

Para probar el algoritmo de reconstrucción de superficies basado en RBFs utilizamos varias funciones de prueba en 2D y 3D. A continuación presentamos algunos los resultados obtenidos.

5.1. Interpolación de una superficie 2D

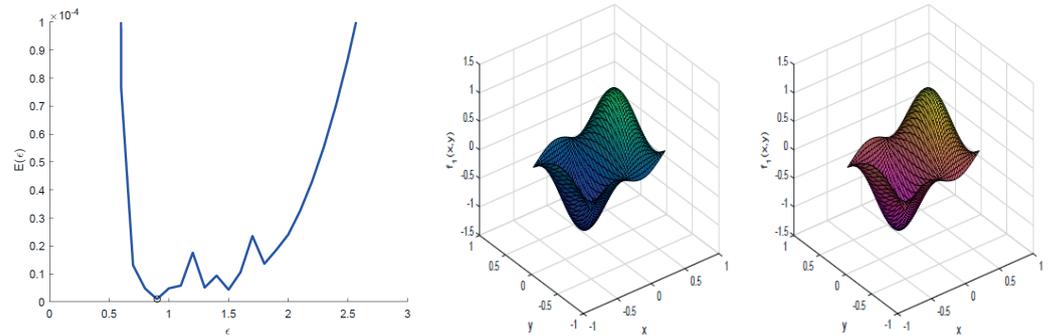
Consideremos la función $f_1(x, y) = \frac{x}{3} + \text{sen}2\pi x \cos \pi y$. Tomando una muestra de $n = 20^2 = 400$ centros en el rectángulo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, e interpolando $m = 50^2 = 2500$ puntos en dicho rectángulo para diferentes valores del parámetro de forma y obtuvimos que el valor que optimiza el error es $\epsilon = 0.9$, lo cual se puede apreciar en Tabla 2. Esto nos indica que la interpolación con la función multicuádrica dada por la relación $\psi(x) = \sqrt{1 + \epsilon^2 r^2}$, donde $\epsilon = 1/c$, tiene convergencia de orden siete para f_1 . Esto se puede apreciar en la figura (1a) donde se muestra la gráfica correspondiente del error de interpolación vs el parámetro de forma. En la figura (1b-1c) observamos que la superficie original y la superficie obtenida con la interpolante multicuádrica son prácticamente similares. Esto se debe al alto grado de precisión de la interpolante.

TABLA 1: Interpolación de la Función $f_1(x, y)$.

| Parámetro de Forma (ϵ) | $\kappa(A)$ | Error Máximo ($O(\epsilon)$) |
|-----------------------------------|-------------------------|--------------------------------|
| 0.3 | 1.2426×10^{19} | 9.4×10^{-3} |
| 0.6 | 4.5006×10^{19} | 7.6649×10^{-5} |
| 0.9 | 6.3150×10^{19} | 9.5360×10^{-7} |
| 1.2 | 4.7680×10^{19} | 1.7586×10^{-5} |
| 1.5 | 2.0257×10^{19} | 4.3336×10^{-6} |
| 1.8 | 1.2943×10^{19} | 1.3601×10^{-5} |
| 2.1 | 5.7035×10^{17} | 3.2560×10^{-5} |

5.2. Interpolación de una superficie 3D

Las gráficas de las superficies tridimensionales (isosuperficies) presentadas en esta sección fueron realizadas haciendo uso del algoritmo de marching cubes con un isovalor de cero.



(a) Error de interpolación vs el parámetro de forma. (b) Superficie original (c) Superficie interpolada

Figura 1: Interpolación con RBFs de la función $f_1(x, y) = \frac{x}{3} + \text{sen}2\pi x \cos \pi y$

Consideremos la superficie denominada "Toro" definido por la siguiente función

$$f_2(x, y, z) = \left(x^2 + y^2 + z^2 + \frac{351}{400}\right)^2 - 4(x^2 + y^2)$$

definido en el intervalo $[-2, 2]^3$.

Tomando una muestra de $17^3 = 4913$, utilizando el algoritmo de interpolación con RBFs se obtuvo un error máximo de 4.7890×10^{-4} para un parámetro de forma óptimo de 0,24, lo cual es un orden de convergencia razonablemente aceptable dada la naturaleza topológica de la superficie. La figura 2 muestra la triangulación y la reconstrucción de la superficie (toro) con los valores interpolados para una muestra de $27^3 = 19683$ puntos en el intervalo $[-2, 2]^3$.

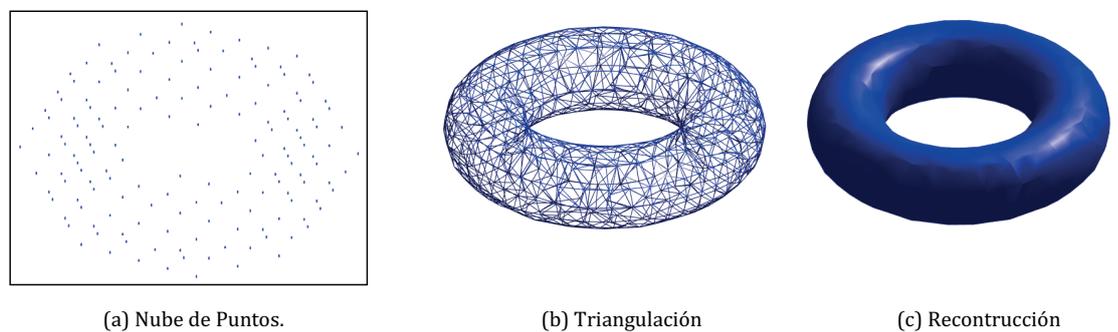


Figura 2: Interpolación de la superficie Implícita $f_2(x, y, z) = \left(x^2 + y^2 + z^2 + \frac{351}{400}\right)^2 - 4(x^2 + y^2)$

Por otro lado en la figura 3 se muestra la correspondiente reconstrucción de la superficies generada por la intersección de tres cilindros mutuamente perpendiculares entre si. Se estudió esta superficie en el intervalo $[-3, 3]^3$ con una muestra de $21^3 = 9261$ centros de los cuales 1889 pertenecen a la superficie. La interpolación se realizó para $22^3 = 10648$ puntos en $[-3, 3]^3$.



Figura 3: Interpolación de la superficie generada por la intersección de tres cilindros

6. Conclusiones y Trabajos futuros

El presente trabajo constituye una primera aproximación sobre el uso de las RBFs como método para la reconstrucción de superficies. El algoritmo que hemos desarrollado nos ha permitido hacer reconstrucciones de superficies 2D y 3D de una forma eficiente. El siguiente paso será aplicarlo a una nube de puntos obtenida de objetos reales para finalmente aplicarlo en la reconstrucción de partes de la anatomía humana que es donde realmente tienen una amplia aplicación y además realizar comparaciones con otros métodos para analizar la eficiencia del mismo.

Referencias

- [1] Branch B., John W (2007). "Reconstrucción de Objetos de Forma Libre a partir de Imágenes de Rango empleando una Red de Parches Nurbs". *Tesis Doctoral*. Ingeniería en Sistemas. Universidad de Colombia, Sede de Medellín.
- [2] Chenoweth, Maggie E. A. (2009). "Numerical Study of Generalized Multiquadric Radial Basis Function Interpolation". *Society for Industrial and Applied Mathematics*.
- [3] Echeverri A., Jaime, Losada, Bell M., Moreno, Francisco J. y Bravo, Alejandro (2009). "Mejoramiento de Imágenes usando Funciones de Base Radial". *Revista Ingenierías*, Universidad de Medellín volumen 8, No. 15.
- [4] Golgabay, Ahmad and Nikan, Omid (2014). A Meshless Method for Numerical Solution of Fractional Differential Equations. *Caspian Journal of Mathematical Sciences (CJMS)*. University of Mazandaran, Irán.
- [5] Hoppe, H., DeRose, T., Duchamp, T., McDonald, J. A. & Stuetzle, W. (1992). "Surface reconstruction from unorganized points". In J. J. Thomas (ed.), *SIGGRAPH* (p./pp. 71-78), : ACM. ISBN: 0-89791-47

- [6] LORENSEN, W. E. & CLINE, H. E. (1987). MARCHING CUBES: A HIGH RESOLUTION 3D SURFACE CONSTRUCTION ALGORITHM. IN M. C. STONE (ED.), *SIGGRAPH* (P./PP. 163-169), : ACM. ISBN: 0-89791-227-6
- [7] Morse, Brian S., Yoo, Terry S., Rheingans, Penny, Chen, David T. and Subramanian, K. R. (2001). Interpolating Implicit Surfaces from Scattered Surface Data Using Compactly Supported Radial Basis Functions. *Shape Modelling International*, Proceedings of the International Conference on Shape Modeling and Applications, IEEE Computer Society.
- [8] Ortega, Mario (2009). "Método de Registro no Rígido basado en Funciones de Base Radial". Aplicación a Neurocirugía utilizando Atlas Cerebrales. *Tesis Doctoral*. Departamento de Sistemas Informáticos y Computación. Universidad Politécnica de Valencia.

Authorization and Disclaimer

Authors authorize ESTEC to publish the paper in the conference proceedings. Neither ESTEC nor the editors are responsible either for the content or for the implications of what is expressed in the paper.